

# Constructions de la conique tangente aux trois côtés du triangle

KUKITA Eishi

Mots-clefs : *programme du premier cycle, éducation des mathématiques, histoire des mathématiques, géométrie, construction*

Dans le résumé du cours intitulé : *Redécouvrons les Mathématiques* (sigle : *RM*), nous avons dégagé une série de propriétés du triangle concernant un certain nombre de ses points remarquables, tels que l'orthocentre, l'isobarycentre, les centres des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits, etc<sup>1</sup>. En tant que supplément de ce cours, nous étudierons dans les pages qui suivent quelques constructions de la conique dépendant de ces propriétés, pour prouver la proposition suivante :

*Tout triangle a une infinité d'ellipses, de paraboles et d'hyperboles, tangentes à ses trois côtés.*

Sous certaines conditions, cette proposition se réduit, comme on l'imaginera sans peine, à un fait bien évident de la géométrie euclidienne : *tout triangle a quatre cercles tangents à ses trois côtés, un inscrit et trois exinscrits.*

## 1 Remarques préliminaires sur la conique

Soit  $\kappa$  un cercle. Soit  $S$  un point pris hors du plan de  $\kappa$ . Alors l'ensemble des droites passant par  $S$  et rencontrant  $\kappa$  décrit une surface, constituée de deux nappes opposées par  $S$  et illimitée des deux côtés. Cette surface est dite le *cône* de base  $\kappa$  et de sommet  $S$ , et les droites qui la décrivent, ses *génératrices*.

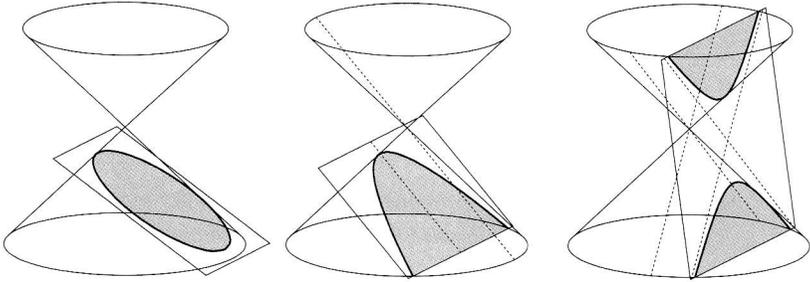
On appelle *section conique*, ou plus simplement *conique*, l'intersection d'un plan avec un cône. La conique se divise en trois espèces, suivant la position du plan sécant par rapport aux génératrices du cône : elle est dite

- une *ellipse*, quand le plan sécant n'est parallèle à aucune de ses génératrices ;
- une *parabole*, quand il est parallèle à une seule génératrice ;

---

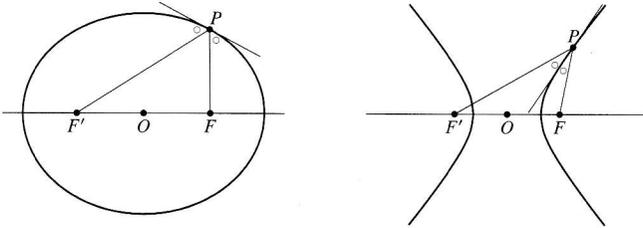
1. *International Human Studies*, No.26, Kagoshima Immaculate Heart University, 2020, pp.39-50.

— une *hyperbole*. quand il est parallèle à deux génératrices.



D'une autre manière, l'ellipse  $\varepsilon$  se définit comme l'ensemble des points  $P$ , tels que la somme des distance  $PF + PF'$  est constante, où  $F$  et  $F'$  sont deux points fixes donnés. La tangente en un point quelconque  $P$  de  $\varepsilon$  est la bissectrice extérieure de  $\angle FPF'$ . Optiquement, cela signifie que tout rayon de lumière partant de  $F$  et se réfléchissant sur  $\varepsilon$  passe par  $F'$ , et inversement; d'où vient que ces deux points donnés se noment *foyers*.

De même, l'hyperbole  $\nu$  se définit comme l'ensemble des points  $P$ , tels que la différence des distances  $|PF - PF'|$  est constante. La tangente en un point quelconque  $P$  de  $\nu$  est la bissectrice intérieure de  $\angle FPF'$ .

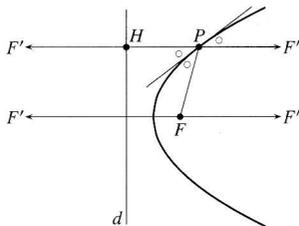


Dans l'ellipse  $\varepsilon$  comme dans l'hyperbole  $\nu$ ,  $(FF')$  se nomme son *axe focal*, et le milieu  $O$  de  $[FF']$ , son *centre*<sup>2</sup>.

Enfin la parabole  $\pi$  se définit comme l'ensemble des points  $P$  équidistants d'un point fixe donné  $F$  et d'une droite fixe donnée  $d$ . La tangente en un point quelconque  $P$  de  $\pi$  est la bissectrice intérieure de  $\angle FPH$ , où  $H$  est le projeté orthogonal de  $P$  sur  $d$ ; ce qui signifie optiquement que tout rayon de lumière parallèle à l'axe focal, c'est-à-dire à la droite perpendiculaire à  $d$  et passant par  $F$ , et se réfléchissant sur  $\pi$ , passe par  $F$ . La droite  $d$  est dite *directrice* de  $\pi$ .

2. Étant donnés deux points distincts  $A$  et  $B$ , nous notons  $(AB)$  la droite qui les contient;  $[AB]$  le segment de  $(AB)$  dont ils sont les deux extrémités. Nous verrons ailleurs comment les *sphères de Dandelin* expliquent la relation des deux définitions de la conique mentionnées ci-dessus.

La parabole  $\pi$  n'a apparemment qu'un seul foyer  $F$ . En fait, si nous admettons, comme on le fait dans la géométrie projective, que toutes parallèles se rencontrent à un certain point qui se trouve à l'infini des deux côtés sur chacune d'elles, et que nous posons que le second foyer  $F'$  soit le point à l'infini où se rencontrent les perpendiculaires à  $d$ , alors la description de la tangente de l'ellipse et de l'hyperbole s'applique sans aucune modification à celle de la parabole.

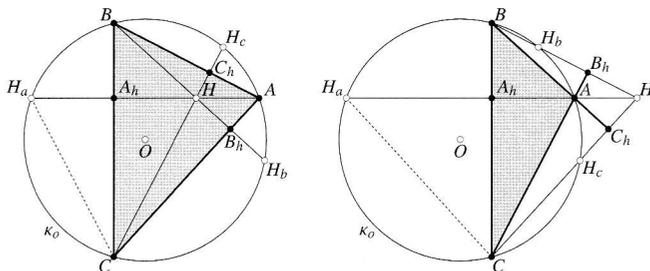


Comme nous l'avons déjà annoncé, nous étudierons quelques constructions de la conique tangente aux trois côtés du triangle.

- Nous commencerons par le cas où la conique à centre, c'est-à-dire l'ellipse et l'hyperbole, a pour deux foyers l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$  et le centre  $O$  de son cercle circonscrit (chap. 2). Cette construction sera ensuite généralisée par la notion de *points isogonaux*, dont le couple  $\{H, O\}$  est un exemple typique (chap. 3).
- Quant à la parabole, nous examinerons une autre construction qui dépend d'une propriété du triangle connue sous le nom de *théorème de Simson*. Nous verrons que cette construction-ci n'est qu'un cas particulier de celle-là, où l'un des deux foyers est jeté à l'infini (chap. 4).

## 2 Triangle et conique à centre (1)

Soit  $ABC$  un triangle. Soit  $O$  le centre du cercle  $\kappa_O$  circonscrit au triangle  $ABC$ . Soit  $H$  l'orthocentre du triangle  $ABC$ . Soient  $A_h, B_h, C_h$  les projetés orthogonaux respectifs de  $A$  sur  $(BC)$ , de  $B$  sur  $(CA)$ , de  $C$  sur  $(AB)$ . Soient  $H_a, H_b, H_c$  les points symétriques de  $H$  respectifs par rapport à  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ .



**Lemme 2.1.**  $\{H_a, H_b, H_c\} \subset \kappa_O$ .

**Démonstration.** Quand le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ , cinq points  $B_h, C_h, H_b, H_c, H$  coïncident avec  $A \in \kappa_o$ ; en plus,  $[BC]$  est un diamètre de  $\kappa_o$ . De là vient évidemment que  $H_a \in \kappa_o$ .

Supposons donc que le triangle  $ABC$  ne soit pas rectangle, et prouvons que  $H_a \in \kappa_o$ . Les triangles  $A_hCH_a$  et  $A_hCH$  sont congruents par définition. En plus,

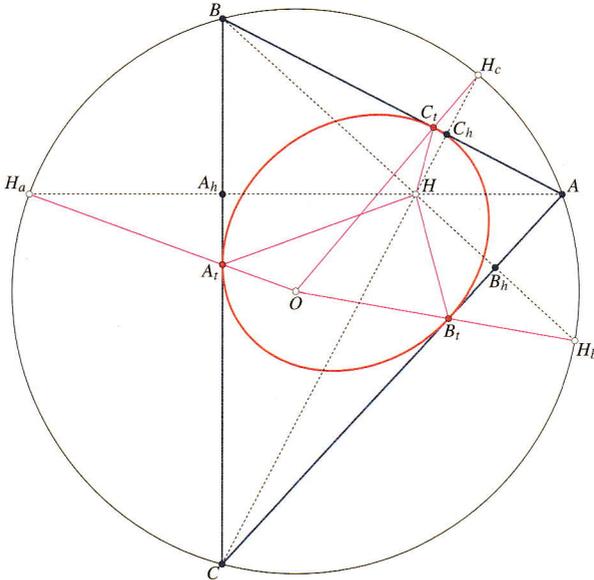
- quand le triangle  $ABC$  est aigu, les triangles  $A_hCH$  et  $C_hAH$  étant semblables. on a  $\angle A_hCH = \angle C_hAH$ ;
- quand  $\angle BAC$  est supérieur à un angle droit, les triangles  $A_hCH, C_hAH$  et  $BAA_h$  étant semblables. on a  $\angle A_hCH = \angle BAA_h$ .

Ces deux égalités s'écrivent aussi :  $\angle BCH_a = \angle BAH_a$ , ce qui signifie que  $A, B, C, H_a$  sont cocycliques. Il en est de même pour  $H_b$  et  $H_c$ .  $\square$

Pour entrer dans le vif de la question, posons que  $(OH_a), (OH_b), (OH_c)$  rencontrent  $(BC), (CA), (AB)$  respectivement en  $A_t, B_t, C_t$ . Quand le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ ,  $A_t$  coïncide avec  $O$ ;  $B_t$  et  $C_t$ , avec  $H$ ; ce cas-là, où la conique dégénère en deux points, nous le mettons de côté dans la considération qui suit.

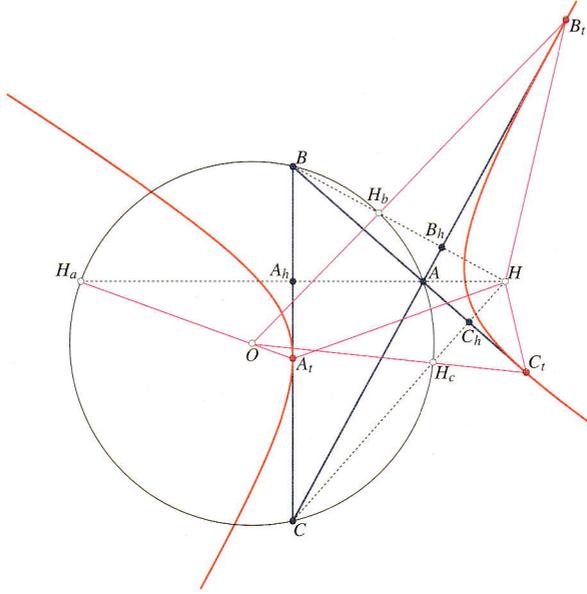
**Théorème 2.2.** Tout triangle  $ABC$  non-rectangle a une conique de foyers  $O$  et  $H$ , tangente à  $(BC), (CA), (AB)$  respectivement en  $A_t, B_t, C_t$ .

**Démonstration.** Quand le triangle  $ABC$  est aigu,  $O$  et  $H$  ne sont séparés par aucun de ses trois côtés, et se trouvent tous deux à l'intérieur du triangle.



Par contre, quand il est obtus,  $O$  et  $H$  sont séparés par chacun des trois côtés,

et se trouvent tous deux à l'extérieur du triangle. Posons que  $\angle BAC$  soit supérieur à un angle droit.



Dans les deux cas, les deux triangles de chacun de trois couples :

$$\{A_h A_t H, A_h A_t H_a\}, \quad \{B_h B_t H, B_h B_t H_b\}, \quad \{C_h C_t H, C_h C_t H_c\},$$

sont congruents par définition. De là, on a d'une part

$$A_t H = A_t H_a, \quad B_t H = B_t H_b, \quad C_t H = C_t H_c, \quad (1)$$

et d'autre part

$$\angle A_h A_t H = \angle A_h A_t H_a, \quad \angle B_h B_t H = \angle B_h B_t H_b, \quad \angle C_h C_t H = \angle C_h C_t H_c. \quad (2)$$

De (1) s'ensuit que, si le triangle  $ABC$  est aigu,

$$A_t O + A_t H = A_t O + A_t H_a = OH_a, \quad B_t O + B_t H = B_t O + B_t H_b = OH_b,$$

$$C_t O + C_t H = C_t O + C_t H_c = OH_c,$$

et s'il est obtus,

$$A_t H - A_t O = A_t H_a - A_t O = OH_a, \quad B_t O - B_t H = B_t O - B_t H_b = OH_b,$$

$$C_tO - C_tH = C_tO - C_tH_c = OH_c.$$

Or, par le lemme 2.1,  $H_a, H_b, H_c$  appartenant tous à  $\kappa_o$  (le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ ),  $OH_a, OH_b, OH_c$  sont tous égaux au rayon de  $\kappa_o$ . Ainsi, quand le triangle  $ABC$  est aigu,

$$A_tO + A_tH = B_tO + B_tH = C_tO + C_tH = (\text{constante}),$$

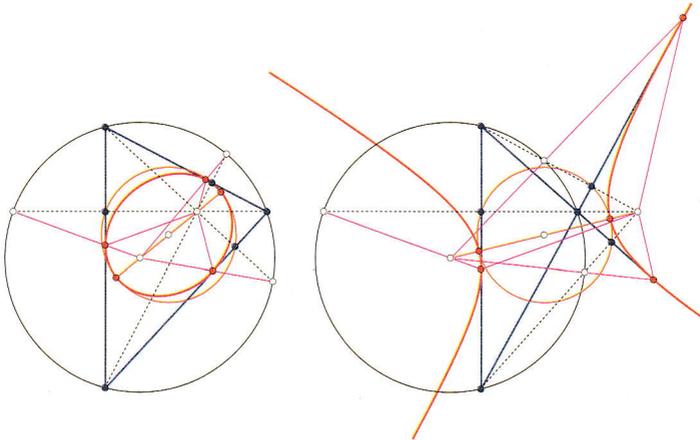
c'est-à-dire que  $A_t, B_t, C_t$  se trouvent sur une ellipse de foyers  $O$  et  $H$ ; et quand il est obtus,

$$|A_tO - A_tH| = |B_tO - B_tH| = |C_tO - C_tH| = (\text{constante}),$$

c'est-à-dire que  $A_t, B_t, C_t$  se trouvent sur une hyperbole de foyers  $O$  et  $H$ .

D'autre part, (2) signifie que  $(A_hA_t), (B_hB_t), (C_hC_t)$ , c'est-à-dire  $(BC), (CA), (AB)$ , sont les bissectrices respectives, ou bien extérieures, ou bien intérieures, de  $\angle H_aA_tH, \angle H_bB_tH, \angle H_cC_tH$ , c'est-à-dire de  $\angle OA_tH, \angle OB_tH, \angle OC_tH$ . Autrement dit, la conique est tangente à  $(BC), (CA), (AB)$  respectivement en  $A_t, B_t, C_t$ .  $\square$

Remarquons que la conique construite de cette façon est tangente, en deux points sur son axe focal  $(OH)$ , au cercle qui passe par  $A_h, B_h, C_h$ ; en effet, le centre de ce cercle est le milieu de  $[OH]$ , et le rayon, la moitié de celui de  $\kappa_o$ <sup>3</sup>.

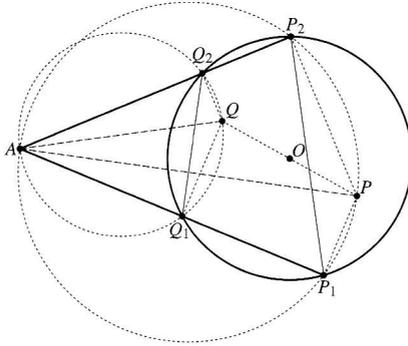


Le cercle qui touche la conique ainsi en deux points sur son axe focal, symétriques l'un à l'autre par rapport à son centre, est dit son *cercle principal*.

3. Il s'agit du *cercle d'Euler*. Voir *RM*, pp.42-43.

### 3 Triangle et conique à centre (2)

Soient  $l_1$  et  $l_2$  deux droites sécantes en  $A$ . Soient  $P$  et  $Q$  deux points quelconques du plan, distincts de  $A$ . Soit  $O$  le milieu de  $[PQ]$ . Soient  $P_1$  et  $P_2$  les projetés orthogonaux respectifs de  $P$  sur  $l_1$  et  $l_2$ . Soient  $Q_1$  et  $Q_2$  les projetés orthogonaux respectifs de  $Q$  sur  $l_1$  et  $l_2$ .



**Lemme 3.1.** Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- $\angle(l_1, AP) \equiv \angle(AQ, l_2) \pmod{\pi}$ .
- $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  sont cocycliques sur un cercle de centre  $O$ .

**Démonstration.** Par définition,  $A, P, P_1, P_2$  sont cocycliques sur le cercle de diamètre  $[AP]$ ; et  $A, Q, Q_1, Q_2$ , sur le cercle de diamètre  $[AQ]$ . Ainsi on a

$$\begin{cases} \angle(AP_1, AP) \equiv \angle(P_2P_1, P_2P) \\ \angle(AQ, AQ_2) \equiv \angle(Q_1Q, Q_1Q_2) \end{cases} \pmod{\pi}. \quad (1)$$

Si l'on suppose a), c'est-à-dire  $\angle(AP_1, AP) \equiv \angle(AQ, AQ_2) \pmod{\pi}$ , alors

$$\angle(P_2P_1, P_2P) \equiv \angle(Q_1Q, Q_1Q_2) \pmod{\pi}. \quad (2)$$

De (1) et (2),

$$\begin{aligned} \angle(P_2A, P_2P_1) &\equiv \angle(P_2A, P_2P) - \angle(P_2P_1, P_2P) \\ &\equiv \frac{\pi}{2} - \angle(P_2P_1, P_2P) \equiv \frac{\pi}{2} - \angle(Q_1Q, Q_1Q_2) \\ &\equiv \angle(Q_1Q, Q_1A) - \angle(Q_1Q, Q_1Q_2) \\ &\equiv \angle(Q_1Q_2, Q_1A) \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  sont cocycliques sur un cercle, dont le centre est le point d'intersection des médiatrices de deux cordes  $[P_1Q_1]$  et  $[P_2Q_2]$ , c'est-à-dire le milieu  $O$  de  $[PQ]$ .

Réciproquement, si l'on suppose b), alors

$$\angle(P_2A, P_2P_1) \equiv \angle(Q_1Q_2, Q_1A) \pmod{\pi}. \quad (3)$$

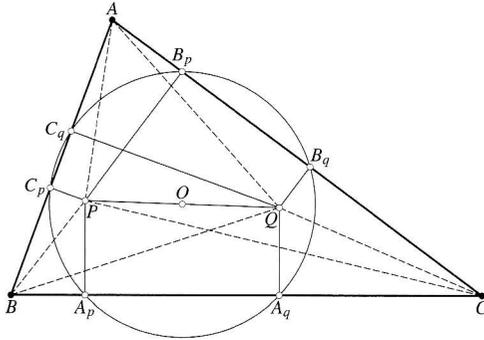
De (1) et (3),

$$\begin{aligned} \angle(AP_1, AP) &\equiv \angle(P_2P_1, P_2P) \\ &\equiv \angle(P_2A, P_2P) - \angle(P_2A, P_2P_1) \\ &\equiv \frac{\pi}{2} - \angle(P_2A, P_2P_1) \equiv \frac{\pi}{2} - \angle(Q_1Q_2, Q_1A) \\ &\equiv \angle(Q_1Q, Q_1A) - \angle(Q_1Q_2, Q_1A) \\ &\equiv \angle(Q_1Q, Q_1Q_2) \equiv \angle(AQ, AQ_2) \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\angle(l_1, AP) \equiv \angle(AQ, l_2) \pmod{\pi}$ .  $\square$

Deux droites  $(AP)$  et  $(AQ)$ , vérifiant :  $\angle(l_1, AP) \equiv \angle(AQ, l_2) \pmod{\pi}$ , sont dites *isogonales* par rapport à  $l_1$  et  $l_2$ .

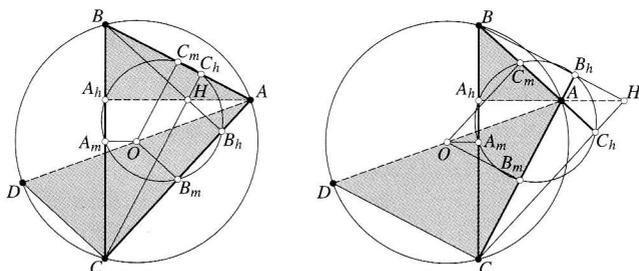
**Lemme 3.2.** Soit  $ABC$  un triangle. Soient  $P$  et  $Q$  deux points, tels que  $(AP)$  et  $(AQ)$  sont isogonales par rapport à  $(AB)$  et  $(AC)$ , et  $(BP)$  et  $(BQ)$ , par rapport à  $(BA)$  et  $(BC)$ . Alors  $(CP)$  et  $(CQ)$  sont isogonales par rapport à  $(CA)$  et  $(CB)$ .



**Démonstration.** Soient  $A_p, B_p, C_p$  les projetés orthogonaux respectifs de  $P$  sur  $(BC), (CA), (AB)$ . Soient  $A_q, B_q, C_q$  les projetés orthogonaux respectifs de  $Q$  sur  $(BC), (CA), (AB)$ . Soit  $O$  le milieu de  $[PQ]$ .

$(AP)$  et  $(AQ)$  étant isogonales,  $B_p, B_q, C_p, C_q$  sont cocycliques sur un cercle  $\kappa_1$  de centre  $O$ . De même,  $(BP)$  et  $(BQ)$  étant isogonales,  $C_p, C_q, A_p, A_q$  sont cocycliques sur un cercle  $\kappa_2$  de centre  $O$ . Les deux cercle  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , tous deux de centre  $O$  et contenant  $C_p$  et  $C_q$ , sont donc identiques. De là vient que,  $A_p, A_q, B_p, B_q$  étant cocycliques,  $(CP)$  et  $(CQ)$  sont isogonales par rapport à  $(CA)$  et  $(CB)$ .  $\square$

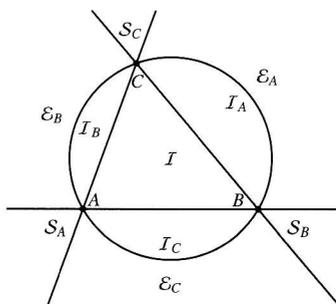
Ainsi, à tout point  $P$ , on peut associer un point  $Q$ , où se rencontrent les droites isogonales de  $(PA)$ ,  $(PB)$ ,  $(PC)$ .  $P$  et  $Q$  sont dits *points isogonaux* par rapport au triangle  $ABC$ .



Par exemple, dans tout triangle  $ABC$ , l'orthocentre  $H$  et le centre  $O$  du cercle circonscrit sont isogonaux. En effet, d'une part, nous avons vu que  $A_h, B_h, C_h$ , projetés orthogonaux respectifs de  $H$  sur  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ , et  $A_m, B_m, C_m$ , projetés orthogonaux respectifs de  $O$  sur  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ , sont cocycliques sur le cercle d'Euler, dont le centre est le milieu de  $[HO]$ <sup>4</sup>. D'autre part, si l'on pose que  $D$  soit le point diamétralement opposé à  $A$ , alors les deux triangles rectangles  $ABA_h$  et  $ADC$  étant semblables, on a  $\angle(AB, AH) \equiv \angle(AO, AC) \pmod{\pi}$ ; etc.

Soient  $P$  et  $Q$  deux points isogonaux par rapport à un triangle  $ABC$  inscrit dans un cercle  $\kappa$ .

Soient  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  les demi-plans de frontière  $(BC)$ , respectivement contenant et ne contenant pas  $A$ . Soient  $\beta$  et  $\bar{\beta}$  les demi-plans de frontière  $(CA)$ , respectivement contenant et ne contenant pas  $B$ . Soient  $\gamma$  et  $\bar{\gamma}$  les demi-plans de frontière  $(AB)$ , respectivement contenant et ne contenant pas  $C$ . Soient  $\delta$  et  $\bar{\delta}$  respectivement l'intérieur et l'extérieur de  $\kappa$ .



Pour voir comment les points isogonaux  $P$  et  $Q$  se situent par rapport au triangle  $ABC$ , divisons le plan en dix zones de la façon suivante :

$$I = \alpha \cap \beta \cap \gamma,$$

$$S_A = \alpha \cap \bar{\beta} \cap \bar{\gamma}, \quad S_B = \bar{\alpha} \cap \beta \cap \bar{\gamma}, \quad S_C = \bar{\alpha} \cap \bar{\beta} \cap \gamma,$$

4. Voir *RM*, pp.42-43.

$$\begin{cases} \mathcal{I}_A = \bar{\alpha} \cap \beta \cap \gamma \cap \delta \\ \mathcal{E}_A = \bar{\alpha} \cap \beta \cap \gamma \cap \bar{\delta} \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathcal{I}_B = \alpha \cap \bar{\beta} \cap \gamma \cap \delta \\ \mathcal{E}_B = \alpha \cap \bar{\beta} \cap \gamma \cap \bar{\delta} \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathcal{I}_C = \alpha \cap \beta \cap \bar{\gamma} \cap \delta \\ \mathcal{E}_C = \alpha \cap \beta \cap \bar{\gamma} \cap \bar{\delta} \end{cases}.$$

**Lemme 3.2.** Si  $P$  se trouve sur un côté du triangle  $ABC$ , alors  $Q$  coïncide avec le sommet opposé à ce côté.

**Démonstration.** On ne perd pas la généralité en supposant que  $P \in (BC)$ . Alors

$$\begin{cases} \angle(BC, BP) \equiv 0 \\ \angle(CB, CP) \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle(BQ, BA) \equiv 0 \\ \angle(CQ, CA) \equiv 0 \end{cases} \pmod{\pi},$$

c'est-à-dire que  $Q \in (BA) \cap (CA) = \{A\}$ .  $\square$

**Lemme 3.3.** Si  $P \in \kappa$ , alors les droites isogonales respectives de  $(AP)$ ,  $(BP)$ ,  $(CP)$  sont toutes parallèles entre elles.

**Démonstration.** On ne perd pas la généralité en supposant que  $P$  se trouve sur l'arc  $BC$ . Soient  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  les points d'intersection respectifs des droites isogonales de  $(AP)$ ,  $(BP)$ ,  $(CP)$  avec  $\kappa$ . Alors, d'une part,

$$\begin{aligned} \angle(BA, BB') &\equiv \angle(BP, BC) \\ &\equiv \angle(AP, AC) \\ &\equiv \angle(AB, AA') \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $(BB') \parallel (AA')$ ; d'autre part,

$$\angle(CC', CA) \equiv \angle(CB, CP) \equiv \angle(AB, AP) \equiv \angle(AA', AC) \pmod{\pi},$$

c'est-à-dire  $(CC') \parallel (AA')$ .  $\square$

Ce sera dans le chapitre suivant que nous discuterons ce cas-là, où  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  se rencontrent en un point à l'infini  $Q$ . D'ici jusqu'à la fin de ce chapitre, nous supposons que  $P \notin \kappa \cup (AA') \cup (BB') \cup (CC')$ .

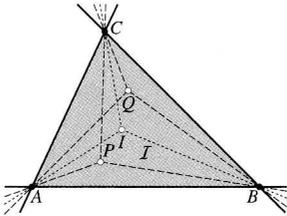
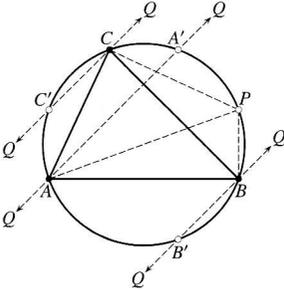
**Lemme 3.4.** Si  $P \in I$ , alors  $Q \in I$ .

**Démonstration.** Soit  $I$  le centre du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$ . Par définition, on a

$$\begin{cases} \angle(AB, AI) \equiv \angle(AI, AC) \\ \angle(BC, BI) \equiv \angle(BI, BA) \\ \angle(CA, CI) \equiv \angle(CI, CB) \end{cases} \pmod{\pi},$$

et

$$\begin{cases} \angle(AB, AP) \equiv \angle(AQ, AC) \\ \angle(BC, BP) \equiv \angle(BQ, BA) \\ \angle(CA, CP) \equiv \angle(CQ, CB) \end{cases} \pmod{\pi}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \angle(AP, AI) \equiv \angle(AI, AQ) \\ \angle(BP, BI) \equiv \angle(BI, BQ) \\ \angle(CP, CI) \equiv \angle(CI, CQ) \end{cases} \pmod{\pi},$$

c'est-à-dire que  $(AQ)$ ,  $(BQ)$ ,  $(CQ)$  sont respectivement symétrique à  $(AP)$ ,  $(BP)$ ,  $(CP)$  par rapport à  $(AI)$ ,  $(BI)$ ,  $(CI)$ . Ainsi, étant donné que

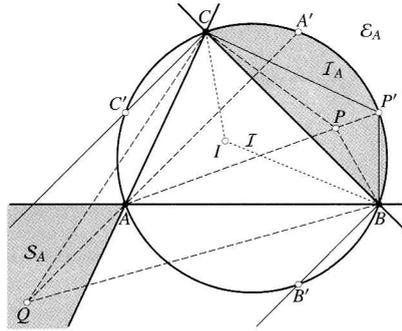
$$\begin{cases} (AP) \subset (\beta \cap \gamma) \cup (\bar{\beta} \cap \bar{\gamma}) \\ (BP) \subset (\gamma \cap \alpha) \cup (\bar{\gamma} \cap \bar{\alpha}) \\ (CP) \subset (\alpha \cap \beta) \cup (\bar{\alpha} \cap \bar{\beta}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (AQ) \subset (\beta \cap \gamma) \cup (\bar{\beta} \cap \bar{\gamma}) \\ (BQ) \subset (\gamma \cap \alpha) \cup (\bar{\gamma} \cap \bar{\alpha}) \\ (CQ) \subset (\alpha \cap \beta) \cup (\bar{\alpha} \cap \bar{\beta}) \end{cases},$$

on obtient que

$$Q \in (AQ) \cap (BQ) \cap (CQ) \subset \alpha \cap \beta \cap \gamma = I.$$

□

**Lemme 3.5.** Si  $P \in \mathcal{I}_X$ , alors  $Q \in \mathcal{S}_X$  ( $X \in \{A, B, C\}$ ); et réciproquement.



**Démonstration.** On ne perd pas la généralité en supposant que  $P \in \mathcal{I}_A$ .

Soit  $P'$  un point tel que  $\kappa \cap (AP) = \{A, P'\}$ . Soient  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  trois points appartenant à  $\kappa$ , tels que  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  sont les droites isogonales respectives de  $(AP')$ ,  $(BP')$ ,  $(CP')$  par rapport au triangle  $ABC$ ,

Comme nous l'avons vu dans le lemme 3.5,  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  sont alors toutes parallèles entre elles.

Soient  $\lambda_1$  et  $\bar{\lambda}_1$  les demi-plans de frontière  $(BP')$ , respectivement contenant et ne contenant pas  $A$ . Soient  $\lambda_2$  et  $\bar{\lambda}_2$  les demi-plans de frontière  $(BB')$ , respectivement contenant et ne contenant pas  $C$ .

Soient  $\mu_1$  et  $\bar{\mu}_1$  les demi-plans de frontière  $(CP')$ , respectivement contenant et ne contenant pas  $A$ . Soient  $\mu_2$  et  $\bar{\mu}_2$  les demi-plans de frontière  $(CC')$ , respectivement contenant et ne contenant pas  $B$ .

Par définition,  $P$  est strictement intérieur au triangle  $BCP'$  ; ce qui fait que

$$\begin{cases} (BP) \subset (\bar{\alpha} \cap \lambda_1) \cup (\alpha \cap \bar{\lambda}_1) \\ (CP) \subset (\bar{\alpha} \cap \mu_1) \cup (\alpha \cap \bar{\mu}_1) \end{cases}.$$

En plus,  $(BP')$ ,  $(BP)$ ,  $(BC)$  sont respectivement symétriques à  $(BB')$ ,  $(BQ)$ ,  $(BA)$  par rapport à  $(BI)$ , et  $(CP')$ ,  $(CP)$ ,  $(CB)$  à  $(CC')$ ,  $(CQ)$ ,  $(CA)$  par rapport à  $(CI)$ . Ainsi, étant donné que

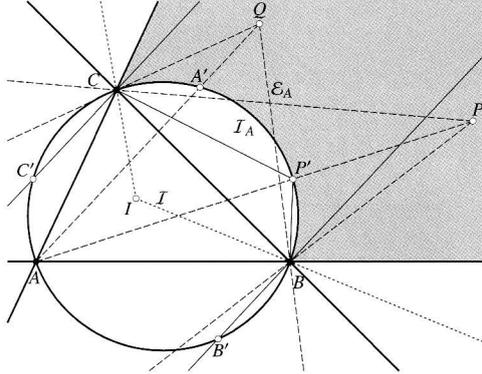
$$\begin{cases} (BQ) \subset (\bar{\gamma} \cap \lambda_2) \cup (\gamma \cap \bar{\lambda}_2) \\ (CQ) \subset (\bar{\beta} \cap \mu_2) \cup (\beta \cap \bar{\mu}_2) \end{cases},$$

on obtient que

$$Q \in (BQ) \cap (CQ) \subset (\bar{\gamma} \cap \lambda_2) \cap (\bar{\beta} \cap \mu_2) \subset \bar{\beta} \cap \bar{\gamma} = S_A.$$

Et en inversant l'ordre de la discussion précédente, on a la réciproque.  $\square$

**Lemme 3.6.** Si  $P \in \mathcal{E}_X$ , alors  $Q \in \mathcal{E}_X$  ( $X \in \{A, B, C\}$ ).



**Démonstration.** On ne perd pas la généralité en supposant que  $P \in \mathcal{E}_A$ .

De la même manière que dans la démonstration du lemme 3.5, étant donné que

$$\begin{cases} (BP) \subset (\gamma \cap \bar{\lambda}_1) \cup (\bar{\gamma} \cap \lambda_1) \\ (CP) \subset (\beta \cap \bar{\mu}_1) \cup (\bar{\beta} \cap \mu_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (BQ) \subset (\alpha \cap \bar{\lambda}_2) \cup (\bar{\alpha} \cap \lambda_2) \\ (CQ) \subset (\alpha \cap \bar{\mu}_2) \cup (\bar{\alpha} \cap \mu_2) \end{cases},$$

on obtien que

$$Q \in (BQ) \cap (CQ) \subset \bar{\alpha} \cap \lambda_2 \cap \mu_2 \subset \bar{\alpha} \cap \beta \cap \gamma = I_A \cap \mathcal{E}_A.$$

Si  $Q \in I_A$ , alors  $P \in S_A$  par le lemme 3.5, ce qui est contradictoire. Donc il faut que  $Q \in \mathcal{E}_A$ .  $\square$

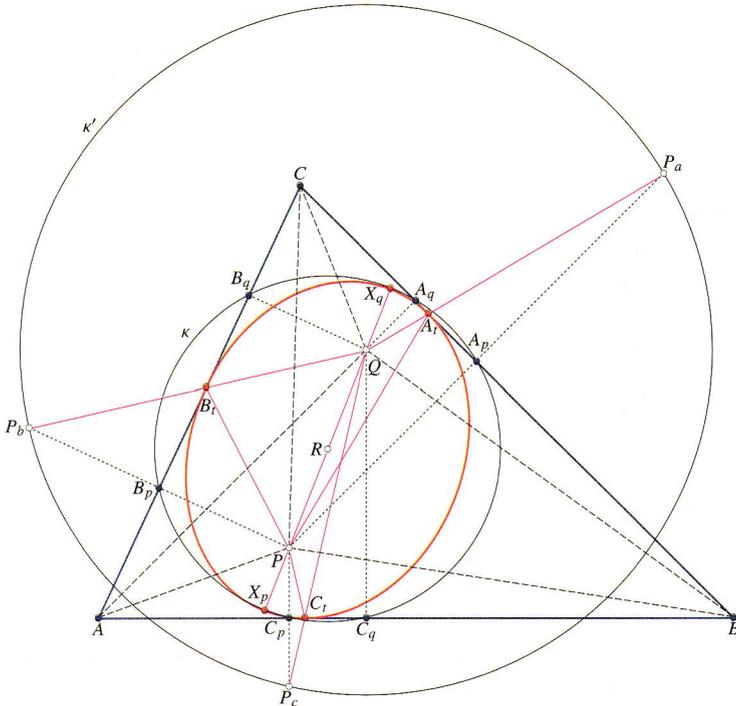
**Théorème 3.7.** Soit  $\{P, Q\}$  un couple quelconque de points isogonaux par rapport à un triangle  $ABC$ . Alors il existe une conique à centre, de foyers  $P$  et  $Q$ , tangente aux trois côtés du triangle  $ABC$ . Autrement dit, tout triangle a une infinité d'ellipses et d'hyperboles tangentes à ses trois côtés.

**Démonstration.** Soient  $A_p, B_p, C_p$  les projetés orthogonaux respectifs de  $P$  sur  $(BC), (CA), (AB)$ . Soient  $A_q, B_q, C_q$  les projetés orthogonaux respectifs de  $Q$  sur  $(BC), (CA), (AB)$ . Les six points ainsi définis sont cocycliques sur un cercle  $\kappa$  par le lemme 3.2.

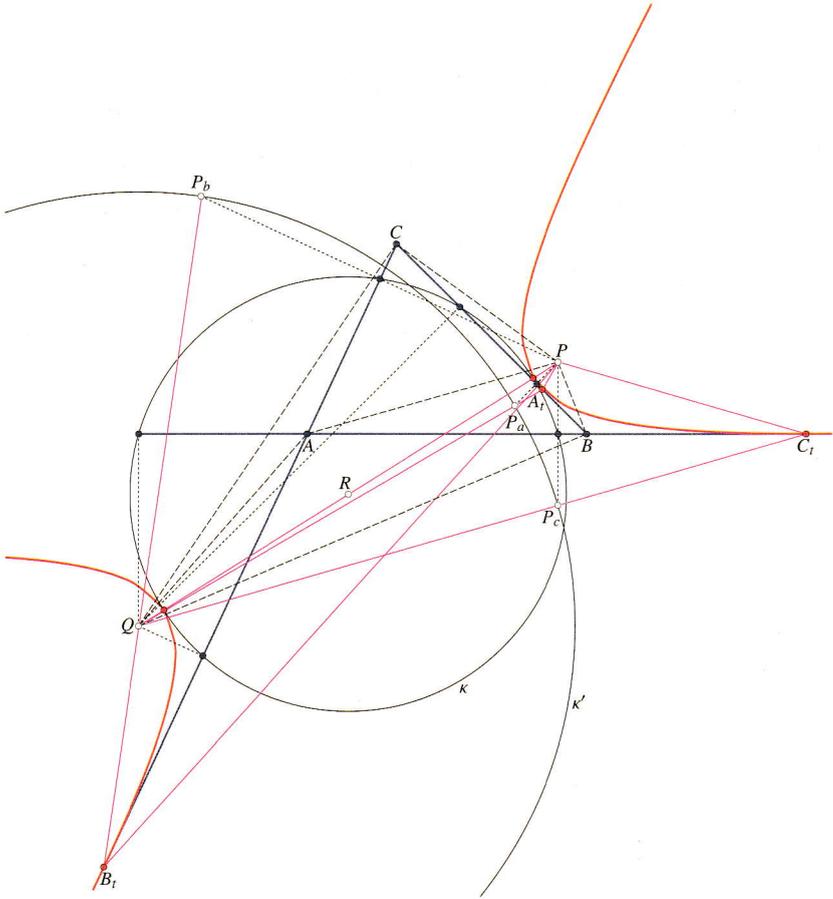
Soient  $P_a, P_b, P_c$  les points symétriques respectifs de  $P$  par rapport à  $A_p, B_p, C_p$ . Les trois points ainsi définis sont cocycliques sur un cercle  $\kappa'$ , image de  $\kappa$  par l'homothétie de centre  $P$  et de rapport 2.

Soient  $A_t, B_t, C_t$  les points d'intersection respectifs de  $(BC)$  et  $(QP_a)$ ,  $(CA)$  et  $(QP_b)$ ,  $(AB)$  et  $(QP_c)$ . Nous verrons que la conique en question est tangente à  $(BC), (CA), (AB)$  respectivement en  $A_t, B_t, C_t$ .

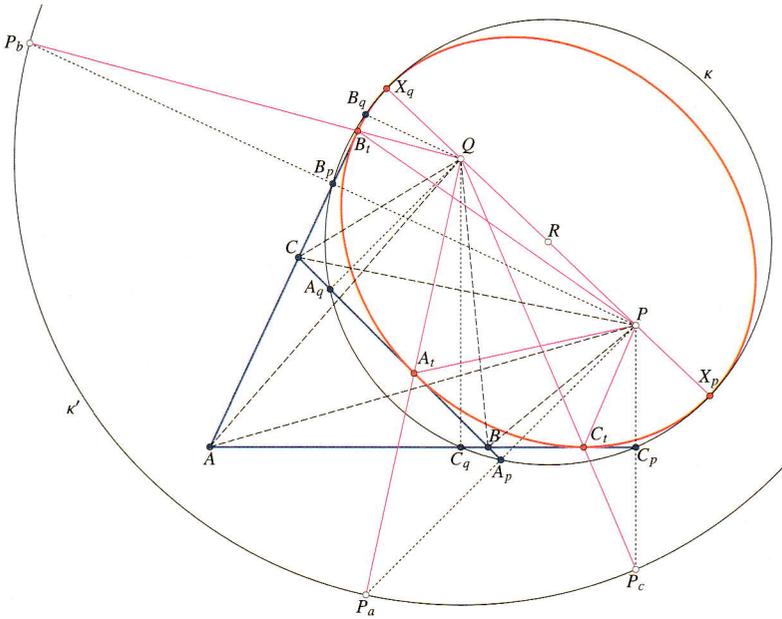
[A] Quand  $P$  et  $Q$  sont tous deux strictement intérieurs au triangle  $ABC$  (voir lemme 3.4), la conique est une ellipse.



[B] Quand  $P$  et  $Q$  sont tous deux strictement extérieurs au triangle  $ABC$ , et que chacun de ces deux points est dans un des deux secteurs angulaires opposés par un des sommets du triangle  $ABC$  (voir lemme 3.5), la conique est une hyperbole.



[C] Quand  $P$  et  $Q$  sont tous deux strictement extérieurs au triangle  $ABC$ , et qu'ils sont tous deux dans un même secteur angulaire (voir lemme 3.6), la conique est une ellipse.



Dans tous ces trois cas, les deux triangles de chacun de trois couples :

$$\{A_p A_t P, A_p A_t P_a\}, \quad \{B_p B_t P, B_p B_t P_b\}, \quad \{C_p C_t P, C_p C_t P_c\},$$

sont congruents par définition. De là, on a d'une part

$$A_t P = A_t P_a, \quad B_t P = B_t P_b, \quad C_t P = C_t P_c, \quad (1)$$

et d'autre part

$$\angle A_p A_t P = \angle A_p A_t P_a, \quad \angle B_p B_t P = \angle B_p B_t P_b, \quad \angle C_p C_t P = \angle C_p C_t P_c. \quad (2)$$

De (1) s'ensuit que, dans [A] et [C],

$$A_t P + A_t Q = A_t P_a + A_t Q = Q P_a, \quad B_t P + B_t Q = B_t P_b + B_t Q = Q P_b,$$

$$C_t P + C_t Q = C_t P_c + C_t Q = Q P_c,$$

et dans [B],

$$A_t Q - A_t P = A_t Q - A_t P_a = Q P_a, \quad B_t P - B_t Q = B_t P_b - B_t Q = Q P_b,$$

$$C_t Q - C_t P = C_t Q - C_t P_c = Q P_c.$$

Or  $[QP_a], [QP_b], [QP_c]$  sont tous des rayons de  $\kappa'$ , ce qui fait que, dans  $[A]$  et  $[C]$ ,

$$A_tP + A_tQ = B_tP + B_tQ = C_tP + C_tQ = (\text{constante}),$$

c'est-à-dire que  $A_t, B_t, C_t$  se trouvent sur une ellipse de foyer  $P$  et  $Q$ ; et dans  $[B]$ ,

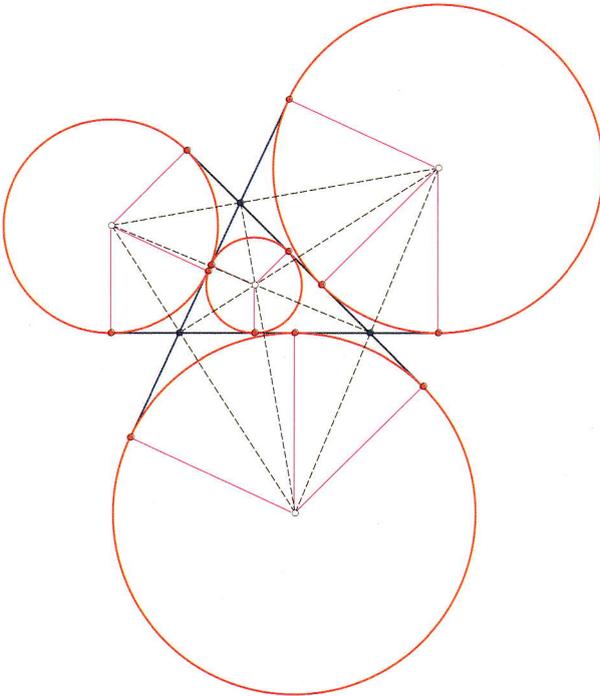
$$|A_tP - A_tQ| = |B_tP - B_tQ| = |C_tP - C_tQ| = (\text{constante}),$$

c'est-à-dire que  $A_t, B_t, C_t$  se trouvent sur une hyperbole de foyer  $P$  et  $Q$ .

D'autre part, (2) signifie que  $(A_pA_t), (B_pB_t), (C_pC_t)$ , c'est-à-dire  $(BC), (CA), (AB)$ , sont les bissectrices respectives de  $\angle PA_tP_a, \angle PB_tP_b, \angle PC_tP_c$ , c'est-à-dire de  $\angle PA_tQ, \angle PB_tQ, \angle PC_tQ$ . Autrement dit, la conique est tangente à  $(BC), (CA), (AB)$  respectivement en  $A_t, B_t, C_t$ .

Comme les lemmes 3.4, 3.5, 3.6 le montrent, à moins que  $P \in \kappa_o \cup (BC) \cup (CA) \cup (AB)$  ( $\kappa_o$  : cercle circonscrit au triangle  $ABC$ ), tout point  $P$  du plan a son point diagonal  $Q$  par rapport au triangle  $ABC$ . Ainsi, tout triangle a une infinité d'ellipses et d'hyperboles tangentes à ses trois côtés.  $\square$

Si les deux points isogonaux  $P$  et  $Q$  coïncident l'un avec l'autre à l'intérieur du triangle  $ABC$ , alors la conique que l'on obtient est le cercle inscrit dans ce triangle; à l'extérieur, un de ses trois cercles exinscrits.

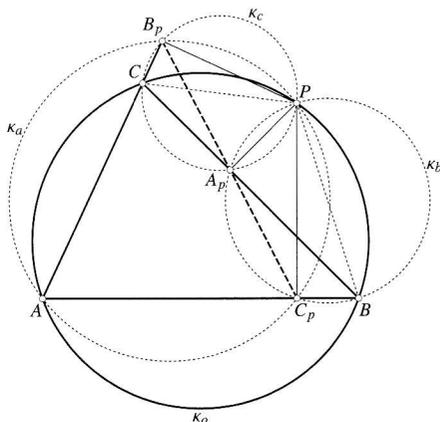


## 4 Triangle et parabole

Est-il possible de trouver une construction de la parabole, conforme à sa définition comme ensemble des points équidistants d'un point fixe (*foyer*) et d'une droite fixe (*directrice*), en même temps qu'analogue à celle de la conique à centre, autrement dit à deux foyers, discutée ci-dessus ? Ce sera l'enjeu de ce chapitre.

**Lemme 4.1.** Soit  $P$  un point sur un cercle  $\kappa_o$  circonscrit à un triangle  $ABC$ . Soient  $A_p, B_p, C_p$  les projetés orthogonaux respectifs de  $P$  sur  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$ . Alors  $A_p, B_p, C_p$  sont alignés.

**Démonstration.** On ne perd pas la généralité en supposant que  $P$  se situe sur l'arc  $BC$  qui ne contient pas  $A$ . Si  $P$  coïncide avec  $A'$ , point diamétralement opposé à  $A$ , alors les trois points en questions sont alignés sur  $(BC)$ ,  $B_p$  et  $C_p$  coïncidant respectivement avec  $C$  et  $B$ . Supposons donc que  $P$  soit plus proche de  $C$  que  $A'$  ; dans cette configuration,  $A_p$  et  $C_p$  sont respectivement inclus dans  $[BC]$  et  $[AB]$ , alors que  $B_p$  est hors de  $[CA]$  au-delà de  $C$ .



Par définition,  $A, B, C, P$  sont cocycliques sur un cercle  $\kappa_o$  ;  $A, B_p, C_p, P$  sur  $\kappa_a$  ;  $A_p, B, C_p, P$  sur  $\kappa_b$  ;  $A_p, B_p, C, P$  sur  $\kappa_c$ . D'où vient que

$$\begin{aligned} \angle(PC_p, PB_p) &\equiv \pi - \angle(AC_p, AB_p) \\ &\equiv \pi - \angle(AB, AC) \equiv \angle(PB, PC) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

et qu'ainsi

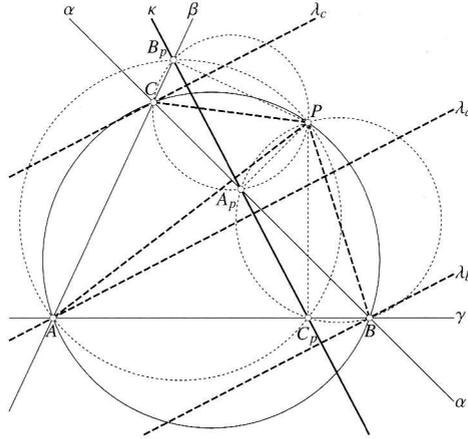
$$\begin{aligned} \angle(A_pB_p, A_pC) &\equiv \angle(PB_p, PC) \\ &\equiv \angle(PC_p, PB_p) - \angle(PC_p, PC) \equiv \angle(PB, PC) - \angle(PC_p, PC) \\ &\equiv \angle(PB, PC_p) \equiv \angle(A_pB, A_pC_p) \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $(BC) \cap (B_pC_p) = \{A_p\}$ . □

La droite sur laquelle se trouvent  $A_p, B_p, C_p$  est dite *droite de Simson* de  $P$  par rapport au triangle  $ABC$ .

**Lemme 4.2.** Soit  $\kappa$  la droite de Simson d'un point  $P$  par rapport à un triangle  $ABC$ . Soient  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$  les droites isogonales respectives de  $(PA)$ ,  $(PB)$ ,  $(PC)$  par rapport au même triangle. Alors  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$  sont toutes perpendiculaires à  $\kappa$ .

**Démonstration.** Notons  $\alpha, \beta, \gamma$  respectivement  $(BC), (CA), (AB)$ .



Par la cocyclicité de  $\{A, B_p, C_p, P\}$ ,

$$\begin{aligned}
 \angle(\lambda_a, \kappa) &\equiv \angle(\lambda_a, \beta) + \angle(\beta, \kappa) \equiv \angle(\gamma, AP) + \angle(\beta, \kappa) \\
 &\equiv \angle(AC_p, AP) + \angle(B_pA, B_pC_p) \\
 &\equiv \angle(B_pC_p, B_pP) + \angle(B_pA, B_pC_p) \\
 &\equiv \angle(B_pA, B_pP) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.
 \end{aligned}$$

Par la cocyclicité de  $\{A_p, B, C_p, P\}$ ,

$$\begin{aligned}
 \angle(\lambda_b, \kappa) &\equiv \angle(\lambda_a, \gamma) + \angle(\gamma, \kappa) \equiv \angle(\alpha, BP) + \angle(\gamma, \kappa) \\
 &\equiv \angle(BA_p, BP) + \angle(C_pB, C_pA_p) \\
 &\equiv \angle(C_pA_p, C_pP) + \angle(C_pB, C_pA_p) \\
 &\equiv \angle(C_pB, C_pP) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.
 \end{aligned}$$

Par la cocyclicité de  $\{A_p, B_p, C, P\}$ ,

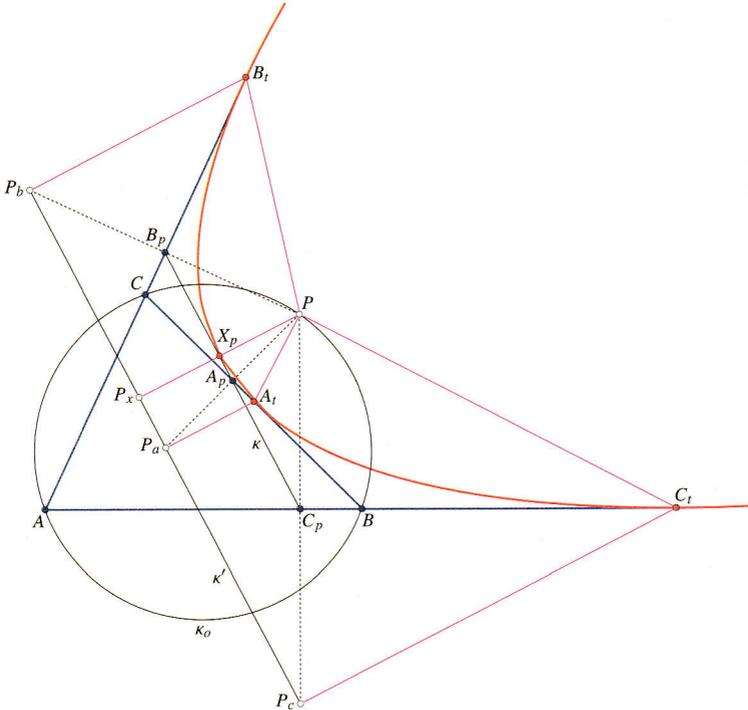
$$\begin{aligned}
 \angle(\lambda_c, \kappa) &\equiv \angle(\lambda_c, \alpha) + \angle(\alpha, \kappa) \equiv \angle(\beta, CP) + \angle(\alpha, \kappa) \\
 &\equiv \angle(CB_p, CP) + \angle(A_pC, A_pB_p) \\
 &\equiv \angle(A_pB_p, A_pP) + \angle(A_pC, A_pB_p) \\
 &\equiv \angle(A_pC, A_pP) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.
 \end{aligned}$$

□

Nous venons de démontrer d'une autre manière le lemme 3.3, selon lequel  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$  sont toutes parallèles entre elles.

**Théorème 4.3.** Soit  $P$  un point sur un cercle  $\kappa_o$  circonscrit à un triangle  $ABC$ . Soit  $\kappa$  la droite de Simson de  $P$  par rapport au triangle  $ABC$ . Si  $P \notin \{A, B, C\}$ , alors il existe une parabole de foyer  $P$ , tangente à  $\kappa$  et aux trois côtés du triangle  $ABC$ . Autrement dit, tout triangle a une infinité de paraboles tangentes à ses trois côtés.

**Démonstration.** Soient  $A_p, B_p, C_p$  les projetés orthogonaux respectifs de  $P$  sur  $(BC), (CA), (AB)$ . Soient  $P_a, P_b, P_c$  les points symétriques respectifs de  $P$  par rapport à  $A_p, B_p, C_p$ .  $P_a, P_b, P_c$  sont alignés sur  $\kappa'$ , image de  $\kappa$  par l'homothétie de centre  $P$  et de rapport 2. Soient  $A_t, B_t, C_t$  les points d'intersection respectifs de  $(BC), (CA), (AB)$  avec les droites perpendiculaires à  $\kappa'$  passant par  $P_a, P_b, P_c$ .



Par définition, les deux triangles de chacun de trois couples :

$$\{A_p A_t P, A_p A_t P_a\}, \quad \{B_p B_t P, B_p B_t P_b\}, \quad \{C_p C_t P, C_p C_t P_c\},$$

sont congruents. De là, on a d'une part

$$A_t P = A_t P_a, \quad B_t P = B_t P_b, \quad C_t P = C_t P_c, \tag{1}$$

et d'autre part

$$\angle A_p A_t P = \angle A_p A_t P_a, \quad \angle B_p B_t P = \angle B_p B_t P_b, \quad \angle C_p C_t P = \angle C_p C_t P_c. \quad (2)$$

D'une part, (1) signifie que  $A_t, B_t, C_t$  sont tous équidistants du point  $P$  et de la droite  $\kappa'$ . Autrement dit, ils sont tous sur la parabole de foyer  $P$  et de directrice  $\kappa'$ .

D'autre part, (2) signifie que  $(A_p A_t), (B_p B_t), (C_p C_t)$ , c'est-à-dire  $(BC), (CA), (AB)$ , sont les bissectrices respectives de  $\angle P A_t P_a, \angle P B_t P_b, \angle P C_t P_c$ , c'est-à-dire de  $\angle P A_t Q, \angle P B_t Q, \angle P C_t Q$ . Autrement dit, cette parabole est tangente à  $(BC), (CA), (AB)$  respectivement en  $A_t, B_t, C_t$ .  $\square$

**Corollaire 4.4.** Soit  $H$  l'orthocentre d'un triangle  $ABC$ . Soit  $\lambda$  une droite quelconque passant par  $H$ . Alors il existe une conique, ayant  $\lambda$  pour directrice et tangente aux trois côtés du triangle  $ABC$ .

**Démonstration.** Soit  $\kappa_o$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Soit  $[CH_c]$  une corde de  $\kappa_o$ , telle que  $(CH_c) \perp (AB)$ . Comme nous l'avons vu dans le lemme 2.1, si l'on pose que  $\{C_h\} = (CH_c) \cap (AB)$ , alors  $H$  est le symétrique de  $H_c$  par rapport à  $C_h$ .

Soit  $[CD]$  une corde de  $\kappa_o$ , telle que  $(CD) \parallel \lambda$ . Soit  $[DE]$  une corde de  $\kappa_o$ , telle que  $(DE) \perp (AB)$ . Soient  $A_e, B_e, C_e$  les projetés orthogonaux respectifs de  $E$  sur  $(BC), (CA), (AB)$ . Par le lemme 4.1, ces trois points sont alignés sur la droite de Simson  $\mu$ .

En plus,  $C_e$  est sur  $(DE)$ .

Soient  $F$  et  $G$  les points d'intersections respectifs de  $\lambda$  avec  $(DE)$  et  $(H_c E)$ .

D'une part, par la cocyclicité de  $\{B, E, A_e, C_e\}$  et de  $\{B, C, D\}$ , et le parallélisme de  $\{\lambda, (CD)\}$ ,

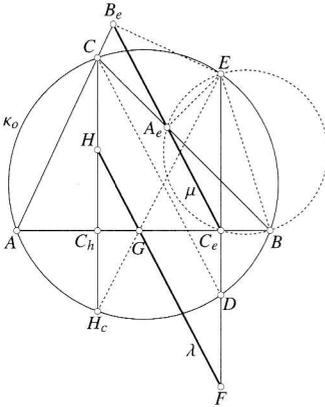
$$\begin{aligned} \angle(DE, \mu) &= \angle(C_e E, C_e A_e) \equiv \angle(BE, BA_e) = \angle(BE, BC) \\ &\equiv \angle(DE, DC) \equiv \angle(FE, FH) = \angle(DE, \lambda) \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\lambda \parallel \mu. \quad (1)$$

D'autre part, par la cocyclicité de  $\{B, C, D, H_c\}$ , et la parallélisme de  $\{(CH_c), (DE)\}$  et de  $\{\lambda, (CD)\}$ ,

$$\begin{aligned} \angle(DE, DC) &\equiv \angle(H_c E, H_c C) \equiv \angle(EH_c, ED) \\ &\equiv \angle(CH_c, CD) \equiv \angle(HH_c, HF) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

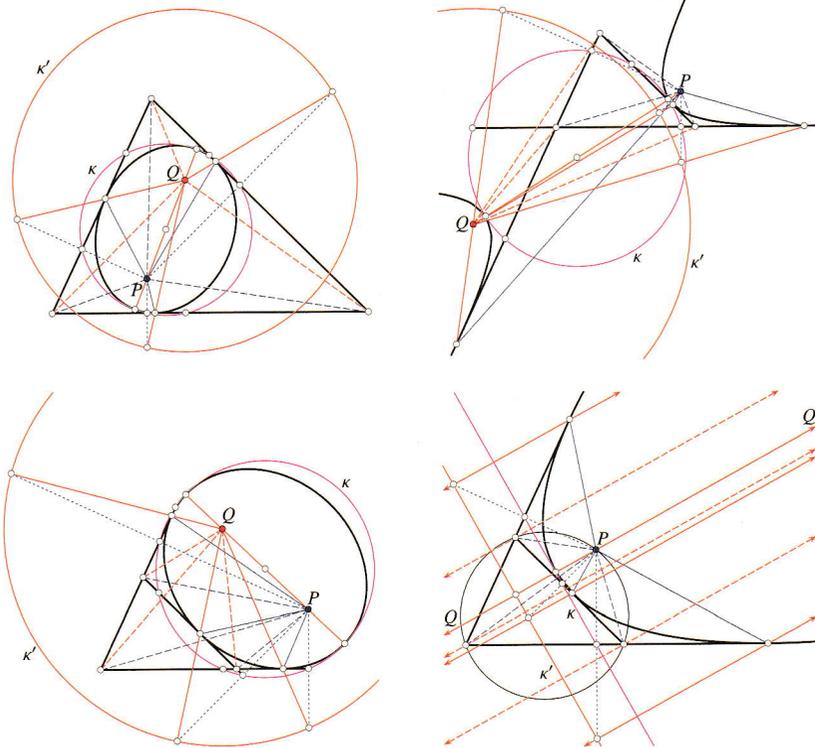


Ainsi, deux triangles semblables  $EFG$  et  $EH_cH$  sont isocèles. En plus,  $(GC_h) = (GC_e) = (AB)$ , médiatrice de  $[H_cH]$ , étant aussi celle de  $[EF]$ ,

$$EF = 2EC_e. \tag{2}$$

De (1) et (2) s'ensuit que  $\lambda$  et l'image de l'homothétie de centre  $E$  et de rapport 2 ; autrement dit, la configuration de  $\{E, \mu, \lambda\}$  par rapport au triangle  $ABC$  est identique à celle de  $\{P, \kappa, \kappa'\}$  dans la démonstration du théorème 4.3.  $\square$

Pour conclure, mettons en regard la construction du théorème 3.7 et celle du théorème 4.3.



Dans le théorème 4.3,  $P$ , foyer de la parabole, est sur le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Dans ce cas-là, comme nous l'avons vu dans les lemmes 3.3 et 4.2, les isogonales de  $(PA)$ ,  $(PB)$ ,  $(PC)$  par rapport au triangle  $ABC$  sont toutes parallèles entre elles, et leur point d'intersection, autre foyer de la conique noté  $Q$  dans le théorème 3.7, disparaît.

Or, à la différence de la géométrie euclidienne qui n'admet pas la concurrence des droites parallèles, la géométrie projective postule que celles-ci se rencontrent en un certain point idéal, situé sur chacune d'elles des deux côtés à l'infini. Supposons donc que dans le théorème 4.3,  $Q$  soit de cette sorte de *point à l'infini*.

Dans le théorème 3.7,  $\kappa'$  est un cercle de centre  $Q$ , d'où sont issus les rayons  $[QP_a]$ ,  $[QP_b]$ ,  $[QP_c]$ , dont chacun passe respectivement chacun des trois points de contact de la conique aux trois côtés du triangle. Dans le théorème 4.3, où  $Q$  est jeté à l'infini, les trois rayons  $[QP_a]$ ,  $[QP_b]$ ,  $[QP_c]$ , parallèles non seulement entre eux mais aussi à  $[QA]$ ,  $[QB]$ ,  $[QC]$ , croisent perpendiculairement  $\kappa'$ , circonférence d'un cercle de rayon de longueur infinie, c'est-à-dire ligne droite.

En plus, dans ces deux constructions,  $\kappa'$  est toujours l'image de  $\kappa$ , qui est un cercle dans le théorème 3.7 et une droite dans le théorème 4.3, par l'homothétie de centre  $P$  et de rapport 2; ce qui corrobore encore l'analogie des deux théorèmes.

Ainsi, l'introduction de la notion de *point à l'infini* permet de constater que le théorème 4.3 est un cas particulier du théorème 3.7, et que la parabole a deux foyers comme l'ellipse et l'hyperbole.

## 論文要旨

# 三角形の三辺に接する円錐曲線の作図

久木田 英史

鍵語：基礎教育・数学教育・数学史・幾何学・作図

昨年度より開設された基礎教育科目「数学再発見」では、三角形の五心から「フォイエルバッハの定理」に至る平面幾何学が主たる話題になり、その際、発展事項として言及された円錐曲線に対し、受講者から特に活発な反応が示された。本稿では上述科目の内容拡充に向けた理論的基礎として、三角形と円の性質に依拠した円錐曲線の作図に関する数学史的所与を体系化する。具体的には、二個の焦点を持つ楕円や双曲線については「等角共役」の概念による作図法を、焦点を（見掛け上）一個しか持たない放物線については「シムソンの定理」と呼ばれる三角形の性質による作図法を紹介し、後者が「無限遠点」の概念により前者の特殊な場合に帰着することを示す。

本稿で扱う作図法は、定規とコンパスのみという古典的手段では相当に繊細な作業を要するが、授業では高機能性と直感的操作性を兼備した動的幾何学ソフトウェアを情報機器上で用いるため、図形の扱いに不慣れな受講者でも、適切な指導の下、各自で実行可能であると期待される。授業の到達目標は、受講者が実際の作図によって、楕円から放物線を経て双曲線に至る連続的変化を間近に観察し、多彩な現象を示す円錐曲線の全体に通底する本性の恒常性を覚知すること、換言すれば、円錐曲線という視覚的に鮮烈な例を通して、具体的な個別性から包括的な一般性へと向かう抽象化の心的過程を、思考の様態として意識的に遂行することとして設定されよう。