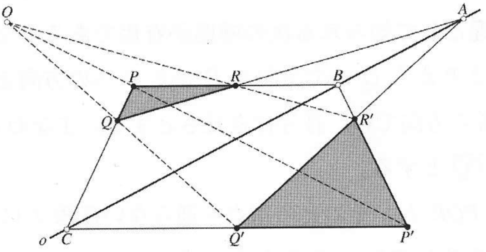
デザルグの双三角形定理と透視図法

久木田　英史

鍵語：デザルグ、透視図法、射影幾何学、思想史、17 世紀

複数の点が同一の直線の上にあるとき、これらの点は**共線**であるというのに対し、複数の直線が同一の点を通るとき、これらの直線は**共点**であるという。この共線と共点という、点と直線の帰属関係を述べる相補的な概念について、ある美しい命題が知られている。

デザルグの双三角形定理　2 個の異なる三角形について、対応する頂点の 3 本の結線が共点ならば、対応する辺の 3 個の交点は共線である。



すなわち三角形 PQR と $P'Q'R'$ について、PP', QQ', RR' が、全て点 O を通るとする。このとき（2 本の直線 l, m の交点を $l \cdot m$ と表すとして）$A = QR \cdot Q'R'$, $B = RP \cdot R'P'$, $C = PQ \cdot P'Q'$ は、全て直線 o の上にある。 定理を真と認めれば、定理の逆は、定理自身から導かれる。

双三角形定理の逆　2 個の異なる三角形について、対応する辺の 3 個の交点が共線ならば、対応する頂点の 3 本の結線は共点である。

証明　三角形 PQR と $P'Q'R'$ において、$A = QR \cdot Q'R'$, $B = RP \cdot R'P'$, $C = PQ \cdot P'Q'$ を共線として、三角 形 BRR' と CQQ に双三角形定理を適用する。BC, $RQ, R'Q'$ は全て A を通るので、定理により、$P = BR \cdot CQ$ と $P' = BR' \cdot$

CQ' は $RR \cdot QQ'$ と共線、すなわち PP', QQ', RR' は共点である。 □

描かれた図形において、10 個の点のそれぞれを 3 本ずつの直線が通り、10 本の直線のそれぞれの上に 3 個ずつの点がある等、定理とその逆における、頂点と辺との際立った対称性が印象的である。本稿では定理の由って来る起源、透視図法における「無限」を巡る考究を通じて、17 世紀フランスの数学者、ジラール・デザルグ (1591-1661) の名前と結び付けられた、この定理の数学史的・科学史的含蓄の展開を試みる。

1　代数的手法による定理の証明

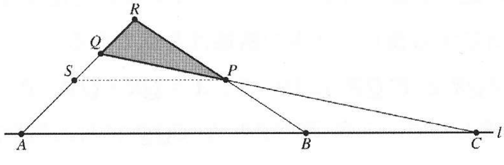
歴史的次元に立ち入る（第 4 節以降）前提として、定理で述べられた図形の特性を幾つか取り上げる。

高校教科書水準の幾何学文献によくあるように、線分の長さのような計量的概念を用いて初等幾何学的に、あるいは解析幾何学的に定理を証明する場合、**メネラウスの定理**として知られる次の補題が有用である。なお、2 個の点 P, Q について、$\overline{PQ}$ は P から Q への方向と Q から P への方向を区別した場合の、線分 PQ の（前者の方向での）符号付き長さとする。すなわち逆方向の線分について、$\overline{QP} = -\overline{PQ}$ とする。

補題　三角形 PQR と、そのどの頂点も通らない直線 l について、l と QR, RP, PQ との交点をそれぞれ A, B, C とすれば、

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{RB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{CQ}} = -1 \tag{1}$$

が成り立つ。逆に、QR 上の点 A、RP 上の点 B、PQ 上の点 C について (1) が成り立てば、A, B, C は共線である。



補題の証明　P を通り l と平行な直線と QR との交点を S とすれば、ユークリッド『原論』第6巻命題2、あるいは三角形 RAB と RSP の相似関係、及び三角形 QAC と QPS の相似関係により、

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{AR}}\cdot\frac{\overline{RB}}{\overline{BP}}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{CQ}}=\frac{\overline{QA}}{\overline{AR}}\cdot\frac{\overline{RA}}{\overline{AS}}\cdot\frac{\overline{SA}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{QA}}{\overline{AQ}}\cdot\frac{\overline{RA}}{\overline{AR}}\cdot\frac{\overline{SA}}{\overline{AS}}=(-1)^3=-1$$

となる。逆に $C'=AB\cdot PQ$ とすれば、A, B, C' は共線なので、以上証明したことにより

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{AR}}\cdot\frac{\overline{RB}}{\overline{BP}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{C'Q}}=-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\overline{PC'}}{\overline{QC'}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{QC}},$$

すなわち同一直線上の点 C と C' は線分 PQ を同じ比で分割するので、2個の点は一致する。□

補題に依拠した定理の証明を二通り挙げる。最初の証明は補題の直接的な適用である。

定理の証明 1　補題の前半により、三角形 OQR と直線 $Q'R'$ について

$$\frac{\overline{OQ'}}{\overline{Q'Q}}\cdot\frac{\overline{QA}}{\overline{AR}}\cdot\frac{\overline{RR'}}{\overline{R'O}}=-1, \tag{a}$$

三角形 ORP と直線 $R'P'$ について

$$\frac{\overline{OR'}}{\overline{R'R}}\cdot\frac{\overline{RB}}{\overline{BP}}\cdot\frac{\overline{PP'}}{\overline{P'O}}=-1, \tag{b}$$

三角形 OPQ と直線 $P'Q'$ について

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{P'P}}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{CQ}}\cdot\frac{\overline{QQ'}}{\overline{Q'O}}=-1, \tag{c}$$

3個の式を辺々掛け合わせれば (1) が得られるので、補題の後半により、A, B, C は共線である。□

次の証明では補題に加え、ベクトルの概念を用いる。

定理の証明 2　PP', QQ', RR' が O で交わることは、ベクトル $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{r}$ と、適当な実数 a, b, c により、$\overrightarrow{OP'}=a\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{OQ'}=b\boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{OR'}=c\boldsymbol{r}$ として表される。但し、O と2個の三角形の頂点を全て異なるものとするために、ベクトルの

係数の取り得る値として、0 と 1 は除外する。また、2 個の三角形の対応する辺が平行とならず、交点を持つように、異なる係数は常に異なる値を取るものとする。

証明 1 の (a) により

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} \cdot \frac{\overline{OR'}}{\overline{RR'}} = \frac{(b-1)c}{b(c-1)} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \frac{-b(c-1)\boldsymbol{q} + (b-1)c\boldsymbol{r}}{b-c},$$

(b) により

$$\frac{\overline{BR}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}} \cdot \frac{\overline{OP'}}{\overline{PP'}} = \frac{(c-1)a}{c(a-1)} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OB} = \frac{-c(a-1)\boldsymbol{r} + (c-1)a\boldsymbol{p}}{c-a},$$

(c) により

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{QQ'}} = \frac{(a-1)b}{a(b-1)} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OC} = \frac{-a(b-1)\boldsymbol{p} + (a-1)b\boldsymbol{q}}{a-b},$$

ゆえに、$\boldsymbol{s} = a\ (b-c)\boldsymbol{p} + b\ (c-a)\boldsymbol{q} + c\ (a-b)\boldsymbol{r}$ とおけば

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \frac{(c-1)\boldsymbol{s}}{(b-c)(c-a)}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -\frac{(b-1)\boldsymbol{s}}{(a-b)(b-c)},$$

よって

$$\overrightarrow{AC} = d\overrightarrow{AB} \quad \left(d = \frac{(b-1)(a-c)}{(c-1)(a-b)} \text{ は実数}\right)$$

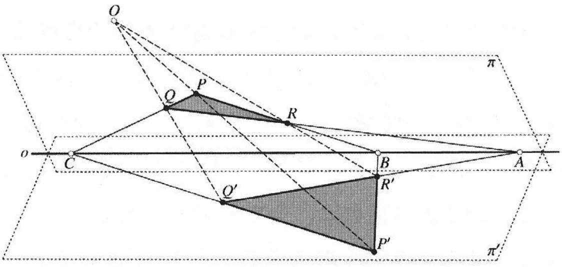
が成り立つ。すなわち点 C は直線 AB の上にある。 □

以上二つの証明は計算により機械的に遂行され、式の対称性に基づく形式美を感じさせはするが、それだけ で定理の幾何学的意味が見出されたとは言い難い。

2　空間図形の性質による定理の証明

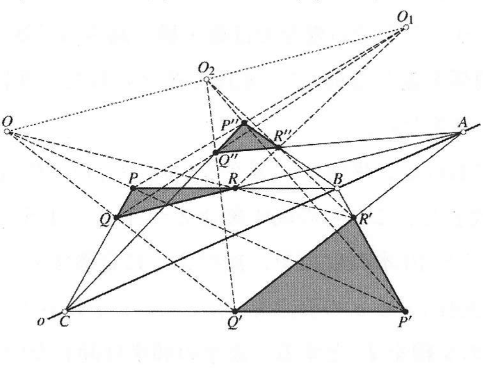
空間図形の性質として考えれば、定理の意味するところは明瞭である。

定理の証明 3　直線 o で、2 個の異なる平面 π と π' が交わるとする。π 上の三角形 PQR と、π にも π' にも 属さない点 O について、直線 OP, OQ, OR と π' との交点をそれぞれ P', Q', R' とする。



2 本の直線 QQ' と RR' は交わるので、4 個の点 Q, Q', R, R' は同一平面上にあり、別の 2 本の直線 QR と $Q'R'$ も（平行でなければ）交わる。この交点を A とする。A は同時に、QR の平面 π と $Q'R'$ の平面 π' に属するので、π と π' の交線 o の上にある。同様に、RP と $R'P'$ の交点を B、PQ と $P'Q'$ の交点を C として、B と C も o の上にある。以上で、三角形 PQR の平面 π と $P'Q'R'$ の平面 π' が異なる場合が証明された。

三角形 PQR と $P'Q'R'$ が同一平面 π の上にある場合も、空間への迂回により、同じ論法で証明される。π と O で交わる直線の上に、2 個の異なる点 O_1 と O_2 を取る。2 本の直線 O_1O_2 と PP' は交わるので、4 個の点 O_1 , O_2 , P, P' は同一平面上にあり、別の 2 本の直線 O_1P と O_2P' も（平行でなければ）交わる。この交点を P'' とする。同様に、$Q'' = O_1Q \cdot O_2Q'$, $R'' = O_1R \cdot O_2R'$ とする。三角形 $P''Q''R''$ の平面 π'' は、明らかに π と異なる。



このとき三角形 PQR と $P''Q''R''$ について、対応する頂点の 3 本の結線は共点なので、上に示したことにより、対応する辺の 3 個の交点は、π と π'' の交線 o の上にある。三角形 $P'Q'R'$ と $P''Q''R''$ についても同様で ある。ゆえに π 上の 2 個の三角形 PQR と $P'Q'R'$ について、対応する 1 組の辺の交点は、三角形 $P''Q''R''$ の 対応する辺と o との交点と一致する。従って、三角形 PQR と $P'Q'R'$ の対応する辺の 3 個の交点は、全て o の上にある。 □

証明 3 の前半における点 P', Q', R' の定義のうち、平面 π 上に与えられた点 P, Q, R を、π に属さない点 O と、それぞれ 1 本の直線で結ぶ操作を、O による P, Q, R の**射影**という。また、そのように生成された直線 $p = OP, q = OQ, r = OR$ と、O を通らない、π とは別の平面 π' との、それぞれの交点 P', Q', R' を求める操作を、π' による p, q, r の**切断**という。これらの事態を、詳細の必要に応じて

$$PQR \overset{O}{\overline{\wedge}} pqr \overset{\pi'}{\overline{\wedge}} P'Q'R', \quad PQR \overset{O}{\overline{\wedge}} P'Q'R',$$

または途中の過程を省いて $PQR \,\overline{\wedge}\, P'Q'R'$

等と表すことにする。この記法によれば、例えば証明 3 の後半では

$$PQR \overset{O_1}{\overline{\wedge}} P''Q''R'' \overset{O_2}{\overline{\wedge}} P'Q'R'$$

となっている。

3 点と直線の対称性

射影と切断という、ここでの場合では縦・横・高さの三次元空間に関する概念と、定理との関係を論じる前 に、定理で述べられた平面図形自体の性質を注意深く観察しておきたい。

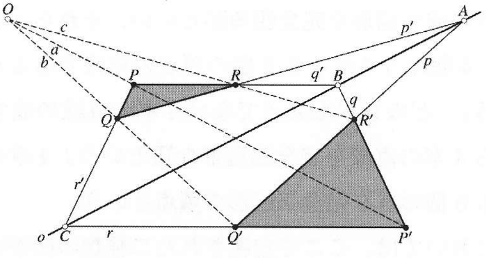
証明 3 の後半における、平面 π に属さない点 O_1, O_2, P'', Q'', R'' を、それぞれ 1, 2, 3, 4, 5 と改名し、これらの成す集合 $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ により、与えられた図形の 10 個の点と 10 本の直線を、次のように定義する。$\mathcal{E}$ の 2 個の異なる元 i, j に対し、直線 ij と π の交点を P_{ij} とし、i, j 以外の $\mathcal{E}$ の 3 個の元の定める平面と π と の交線を l_{ij} とする。添字の順序は問わない。すなわち P_{ij} は

P_{ji} と同じ点を、l_{ij} は l_{ji} と同じ直線を指す。5個の中から2個ないし3個を取る組み合わせは ${}_5C_2 = {}_5C_3 = 10$ 通りなので、与えられた点と直線はこの方式で重複なく網羅される。l_{ij} には添数の同じ点に対応するローマ小文字の名を与える。

(i,j)	P_{ij}	l_{ij}
$(1,2)$	O	$o = ABC$
$(4,5)$	A	$a = OPP'$
$(5,3)$	B	$b = OQQ'$
$(3,4)$	C	$c = ORR'$

(i,j)	P_{ij}	l_{ij}
$(1,3)$	P	$p = AQ'R'$
$(1,4)$	Q	$q = BR'P'$
$(1,5)$	R	$r = CP'Q'$

(i,j)	P_{ij}	l_{ij}
$(2,3)$	P'	$p' = AQR$
$(2,4)$	Q'	$q' = BRP$
$(2,5)$	R'	$r' = CPQ$



各 (i, j) に対し、$\mathcal{E}$ から i, j を除いた集合を $\{u, v, w\}$ とすれば、P_{ij} を通る3本の直線は l_{vw} , l_{wu} , l_{uv} である。

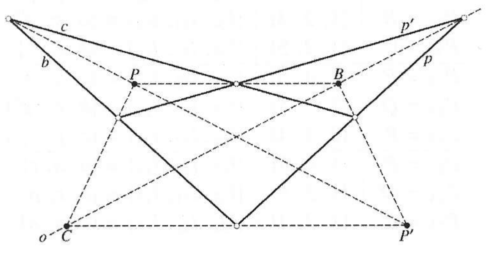
P_{ij}	$\{u, v, w\}$	P_{ij}を通る直線の集合
$P_{12} = O$	$\{3, 4, 5\}$	$\{l_{45}, l_{53}, l_{34}\} = \{a, b, c\}$
$P_{45} = A$	$\{1, 2, 3\}$	$\{l_{23}, l_{31}, l_{12}\} = \{o, p, p'\}$
$P_{53} = B$	$\{1, 2, 4\}$	$\{l_{24}, l_{41}, l_{12}\} = \{o, q, q'\}$
$P_{34} = C$	$\{1, 2, 5\}$	$\{l_{25}, l_{51}, l_{12}\} = \{o, r, r'\}$
$P_{13} = P$	$\{2, 4, 5\}$	$\{l_{45}, l_{52}, l_{24}\} = \{a, q', r'\}$
$P_{14} = Q$	$\{2, 3, 5\}$	$\{l_{35}, l_{52}, l_{23}\} = \{b, r', p'\}$
$P_{15} = R$	$\{2, 3, 4\}$	$\{l_{34}, l_{42}, l_{23}\} = \{c, p', q'\}$
$P_{23} = P'$	$\{1, 4, 5\}$	$\{l_{45}, l_{51}, l_{14}\} = \{a, q, r\}$
$P_{24} = Q'$	$\{1, 3, 5\}$	$\{l_{35}, l_{51}, l_{13}\} = \{b, r, p\}$
$P_{25} = R'$	$\{1, 3, 4\}$	$\{l_{34}, l_{41}, l_{13}\} = \{c, p, q\}$

同様に、l_{ij} の上にある3個の点は P_{vw} , P_{wu} , P_{uv} である。

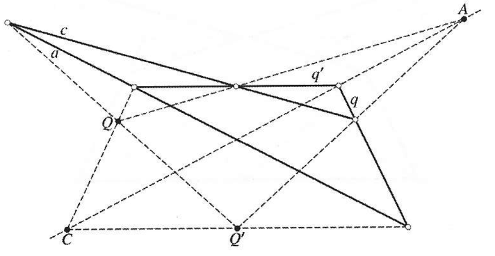
l_{ij}	$\{u, v, w\}$	l_{ij}の上にある点の集合
$l_{12} = o$	$\{3, 4, 5\}$	$\{P_{45}, P_{53}, P_{34}\} = \{A, B, C\}$
$l_{45} = a$	$\{1, 2, 3\}$	$\{P_{23}, P_{31}, P_{12}\} = \{O, P, P'\}$
$l_{53} = b$	$\{1, 2, 4\}$	$\{P_{24}, P_{41}, P_{12}\} = \{O, Q, Q'\}$
$l_{34} = c$	$\{1, 2, 5\}$	$\{P_{25}, P_{51}, P_{12}\} = \{O, R, R'\}$
$l_{13} = p$	$\{2, 4, 5\}$	$\{P_{45}, P_{52}, P_{24}\} = \{A, Q', R'\}$
$l_{14} = q$	$\{2, 3, 5\}$	$\{P_{35}, P_{52}, P_{23}\} = \{B, R', P'\}$
$l_{15} = r$	$\{2, 3, 4\}$	$\{P_{34}, P_{42}, P_{23}\} = \{C, P', Q'\}$
$l_{23} = p'$	$\{1, 4, 5\}$	$\{P_{45}, P_{51}, P_{14}\} = \{A, Q, R\}$
$l_{24} = q'$	$\{1, 3, 5\}$	$\{P_{35}, P_{51}, P_{13}\} = \{B, R, P\}$
$l_{25} = r'$	$\{1, 3, 4\}$	$\{P_{34}, P_{41}, P_{13}\} = \{C, P, Q\}$

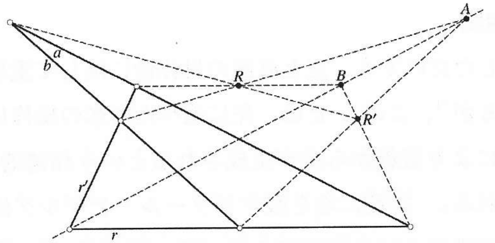
もう一つ、別の観点からも点と直線の対称性を見ておこう。どの３個も共線でない４個の点の成す図形を**完全四角形**といい、それら４個の点を完全四角形の**頂点**という。４個のうち異なる２個の頂点の結線である６本の直線を完全四角形の**辺**という。どの３本も共点でない４本の直線の成す図形を**完全四辺形**といい、それら４本の直線を完全四辺形の**辺**という。４本のうち異なる２本の辺の交点である６個の点を完全四辺形の**頂点**という。

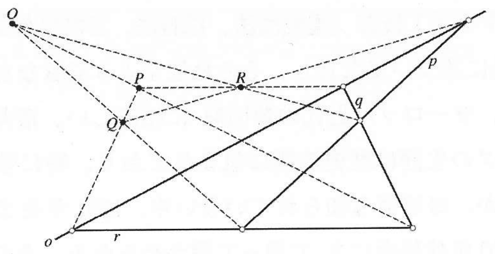
双三角形定理においては、ここで定義された二種類の図形について、次の特異な性質が見出される。すなわ ち完全四角形 *PP'BC* と、対応する名称の完全四辺形 *pp'bc* について、*PP'BC* の 4 個の頂点と *pp'bc* の６個の 頂点は重複しない。また、*PP'BC* の６本の辺と *pp'bc* の４本の辺も重複しない。他方、*PP' BC* の６本の辺は *pp'bc* のそれぞれ異なる頂点を通る。また、*pp'bc* の６個の頂点は *PP'BC* のそれぞれ異なる辺の上にある。

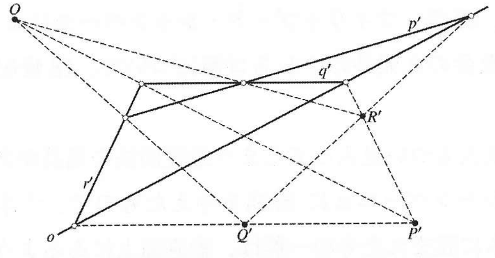


それぞれ対を成す完全四角形と完全四辺形、*QQ'CA* と *qq'ca*、*RR'AB* と *rr'ab*、*OPQR* と *opqr*、*OP'Q'R'* と *op'q'r'* についても同様である。



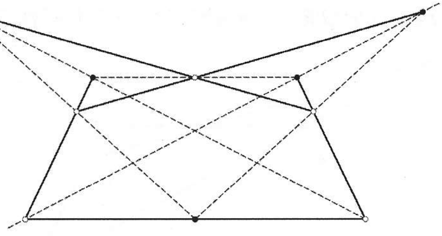






定理の図形は更に、二つの五角形ないし五辺形のうち、一方のそれぞれの頂点が他方のそれぞれ別の辺の上 にあり、一方のそれぞれの辺が他方のそれぞ

れ別の頂点を通るものとも解釈される。



4 透視図法と無限

こうして一瞥しただけでも、点と直線の対称性に関して重層的な厚みを感じさせる定理であるが[*1]、このことは、先に述べた射影の操作により点から直線が、切断の操作により直線から点が生成されるという相補的な事態と無縁でないように思われる。定理に名を残すジラール・デザルグは、単に抽象的な思考に長けた幾何学者というだけでなく、第一線の技師・建築家として、職工たちが生業とする手工技芸（透視図法、採石法、日時計作成法等）を確固たる幾何学の知識に基づいて改良し、その地位をより高貴な自由学芸の域まで高めようと志す、ヨーロッパ近代の黎明期に相応しい、市井の実践の人でもあった。デザルグの生涯は歴史の闇に包まれており、特に彼がどのように自己形成を遂げたか、ほぼ何も知られていない中、1591年生まれの彼の技師として経歴は、1620年代後半にまで遡って確かめられる。その時期に関する証言の一つとして、28年、フィリップ・ド・シャンペーヌにより着手されたカルメル会修道院教会の丸天井のフレスコ画について、18世紀のあるパリ案内記には

> 好事家も玄人もつい見入ってしまう透視図法の逸品がある。数学の達人デザルグがシャンペーニュに線描を与えたもので、十字架のイエスが聖母と聖ヨハネに囲まれたその一群は、垂直面上にあるように見えて、実は

*1 第2節・第3節では、H. S. M. Coxeter, *Projective Geometry*, Springer, 1974, p.18 ～ 27の記述を図解・展開した。

水平面上にある[*2]。

と記されており、30歳代のデザルグが透視図法の分野で既に高い声価を得ていたことが推察される。公刊されたデザルグの最初の論文は『画面外の第三者的な点や距離、その他如何なる事物も用いずに透視図法を実践するための、リヨン人ジラール・デザルグ氏の普遍的方法のうち一つの例』（1636年）と題された透視図法論であり[*3]、双三角形定理が最初に発表されたのも、著名な銅版画家だった弟子のアブラアム・ボスが、透視図法に関する師の学説を敷衍するために著した書物『縮小図並びに原寸図で透視図法を実施するための、リヨン人デザルグ氏による普遍的方法』（1648年）においてであった[*4]。

遠くのものは小さく見え、近くのものは大きく見える。この当然とも思える事柄を反映しようとするとき、絵画は物自体ではなく、物の現れの表現となる。画面の縦横二次元の平面に奥行きという第三の次元を錯視させる手段は何も一つには限られないが、その中でイタリア・ルネサンス盛期のクワトロチェント（15世紀）、フィリッポ・ブルネッレスキ、レオン・バッティスタ・アルベルティ、ピエロ・デッラ・フランチェスカら、フィレンツェの芸術家たちが創始し、その後19世紀後半に至るまでヨーロッパ絵画の揺るぎない基本原理で あり続けた「人為的光学（perspectiva artificialis）[*5]」、すなわち透視図法とは何より、ユークリッド幾何学の 厳格な適用により画面が構成されるような絵画技法として特徴付けられる。透視図法の最初期の理論を含むアルベルティの『絵画論』（1435

---

*2 《 Les curieux et connaisseurs regardent avec une attention particulière un morceau de perspective, dont Desargues, habile mathématicien, avait donné le trait à Champaigne ; c'est un Crucifix entre la Sainte Vierge et Saint Jean. Ce groupe paraît sur un plan perpendiculaire, quoiqu'il soit sur un plan horizontal. 》Pigagnol de la Force, Description de Paris, nouv. éd., t.V, p.345-346. Cité par Hubert Damisch, 《 Desargues et a Métaphysique de la Perspective 》, in *Desaruges en son Temps*, sour la dir. de J. Dhombre et J. Sakarovitch, Blanchard, 1994（sigle : DST）, p.12.

*3 Girard Desargues, *Exemple de l'une des Manières universelles de S. G. D. L., touchant la Pratique de la Perspective sans employer aucun Tiers Point, de Distance ni d'autre Nature, qui soit hors de Champs de l'Ouvrage*, 1636（sigle : MUD）.

*4 Abraham Bosse, *La Manière universelle de Monsuer Desargues Lyonnais pour pratiquer la Perspective par Petit Pied comme le Géométral*, 1648（sigle : MUB）.

*5 ボエティウスによるアリストテレス翻訳で optikē の訳語として用いられて以来、中世ラテン語で perspectiva 乃至 prospectiva は一般に視覚、または視覚の学としての光学と同意だった。Perspectiva artificialis との対比で perspectiva naturalis と言われる場合も同じ意味 である。

年）では、視点と視野の間に拡がる「視覚のピラミッド」が

> ピラミッドとは傾いた物体の形状であり、その底面からはあらゆる直線が上方へと引かれ、それらが ただ一つの頂点で交わっている。視覚のピラミッドの底面とは視野であり、ピラミッドの側面とは先に 述べたように、諸々の視線それ自体のうち、外側と称されるものである。ピラミッドの頂点は目の位置に存し、三角形を成す量の諸々の角が、そこで一つに集まっている[*6]。

と想定された上で、「絵画」が次のように定義される。

> そうであるならば、画面を見る者は、ピラミッドのある切断面を見ているように思われる。従って絵 画とは、中心と照明が設定された際の、与えられた距離による視覚のピラミッドの切断が、線と色彩で 巧みに描かれた、与えられた表面として現れたものであるだろう[*7]。

透視図法で考えられた「絵画」とは従って、知覚の地平に囲まれてある諸事物と、観察者の目の位置との間に 延びる視線の束、すなわち視点からの諸事物の射影を画面で切断した像に他ならなず、第 2 節での記法を用いれば、そこでは

$$\text{視野} \overset{\text{視点}}{\barwedge} \text{視線の束全体} \overset{\text{画面}}{\barwedge} \text{絵画、} \quad \text{あるいは} \quad \text{各事物} \overset{\text{視点}}{\barwedge} \text{各視線} \overset{\text{画面}}{\barwedge} \text{各図像}$$

という図式が成り立つことが、暗黙のうちに了解されている。

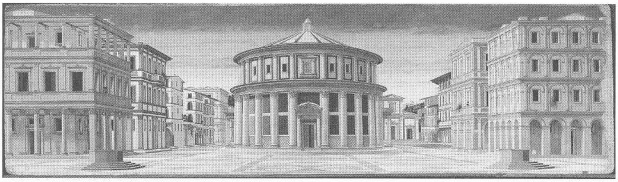
アルベルティが『絵画論』で示す作図例は、画面に奥行きの錯覚を与えるのに効果的として当時頻繁に描か れていた、地面を敷き詰める正方形の敷石を表す四角形である（上は作者未詳『理想都市』、ウルビーノ・マルケ国立美術館、下はピエトロ・ペルジーノ『ペテロへの鍵の授与』、1481 年、ローマ・システィー

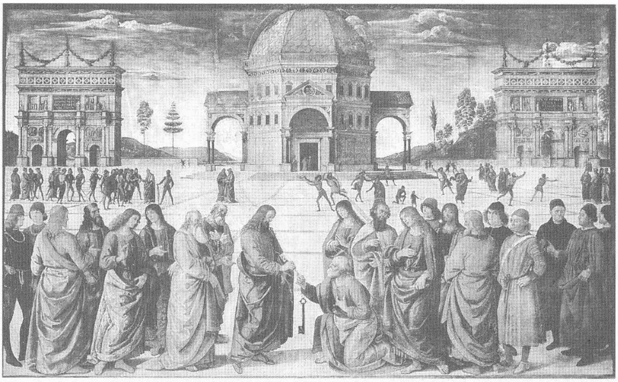
---

*6 《Pyramis est figura corporis oblongi ab cujus basi omnes lineae rectae sursum protractae ad unicam cuspidem conterminent. Basis pyramidis visa superficies est, latera pyramidis radii ipsi visivi quos extrinsecos nuncupari diximus. Cuspis pyramidis illic intra oculum considet, ubi anguli quantitatum in triangulis conveniunt.》Leon Battista Alberti, *De Pictura*, 1435 ; *La Peinture*, éd. par Th. Godsenne et B. Prévost, Seuil, 2004, p.56-58.

*7 《 Quae res cum ita sit, pictam superficiem intuentes intercisionem quandam pyramidis videre videntur. Erit ergo pictura intercisio pyramidis visivae secundum datum intervallum, posito centro, statutisque luminibus, in datam superficiem lineis et coloribus arte repraesentata. 》Ibid., p.70.

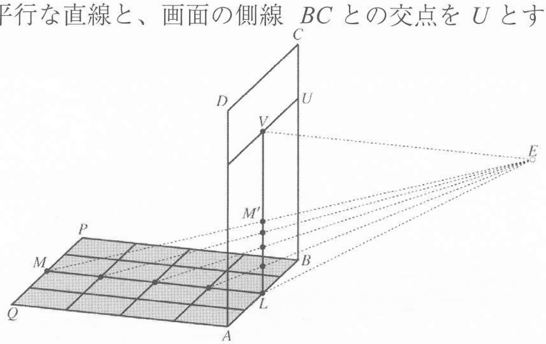
ナ礼拝堂)。





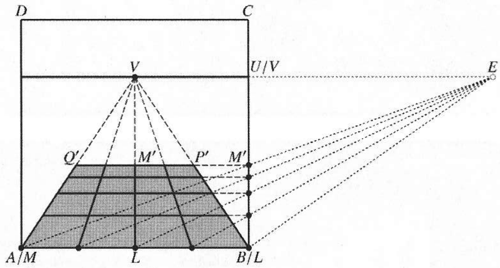
「正則な作図 (costruzione legittima)」として知られることになるその方法は、概ね次のように要約される[*8]。

図において、E を観察者の目の位置、四角形 $ABCD$ を画面、$ABPQ$ を正方形の格子で覆われた地面とする。E から画面に下ろした垂線の足を V とし、V を通り地面と平行な直線と、画面の側線 BC との交点を U とする。



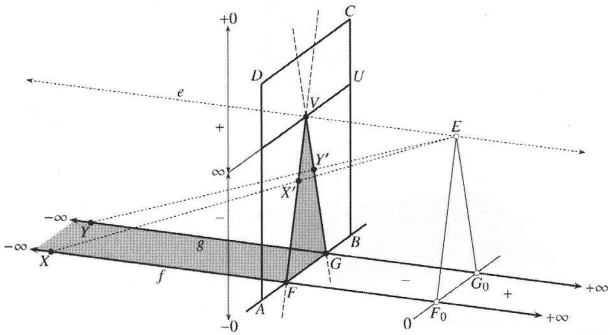
*8 ibid., p.82-90.

このとき、目と画面の位置を基準として正面図となる平面 *ABCD* と、側面図となる平面 *ELMV* を、合同な二つの直角三角形、*ABCD* 上の *ABU* と *ELMV* 上の *MLV* が一致するように重ね合わせてみよう。



地面と画面の交線 *AB*（linea jacens）を基準に考える。*AB* と平行な地面上の直線 *PQ* を表す、画面上の水平 線 *P'Q'* の、画面における高さは、側面図における、直線 *EM* と *LV* の交点 *M'* の高さとして求められる。画 面上の他の水平線、すなわち *AB* と平行な、他の地面上の直線の像の高さについても同様である。 これに対し、*AB* と垂直な地面上の直線（*AQ*, *LM*, *BP* 等）は全て、画面において、直線 *UV* 上の点 *V* に収斂していくように描かれる（*AQ'*, *LM'*, *BP'* 等）。すなわち透視図法において、平行な直線の集合は、場合により、一点で交わる直線の集合として表象されるのである。

アルベルティがそれぞれ中心点（punctum centricum）、中心線（linea centrica）と呼ぶ、平行線像の交点 *V*、その *V* を通る直線 *UV* とは、画面の上で何を表しているのか。より単純な、2 本の平行線だけから成る図形で考えてみよう。



画面 $ABCD$ と観察者の目の位置 E、またこれらの定める点 U, V は先の透視図と同じとする。直線 EV を e と名付け、e と平行な地面上の2本の直線 f と g を適当に取る。f と g は当然、互いに平行である。これらの直線の、直線 AB との交点をそれぞれ F, G とする。また、E から f と g に下ろした垂線の足を、それぞれ F_0 , G_0 とする。f と g を2本の数直線と考え、基準点0を、それぞれ F_0 と G_0 に取り、これより画面寄りの 側を負の方向、画面と反対の側を正の方向と定める。

f と g が透視図でどのように表象されるかを見るために、動点 X が f 上を、Y が g 上を動いていくとして、視線である直線 EX や EY と、画面 $ABCD$ との交点 X', Y' の軌跡を辿ってみる。 直線 f の像としての線分 FV は、X が F から発して、f 上を負方向に動いていく際の、X' の軌跡と考えられる。X が F から遠ざかるにつれ、X' は F から上昇して V に近付き、直線 EX と直線 e の成す角 $X'EV$ は次第に小さくなっていく。思考実験として、角 $X'EV$ の大きさが0となり、X' と V が完全に一致するような、極限的な場合を考えると、このとき X と F との距離は、如何なる有限の距離よりも大きくなくてはならない。従って、$X_{-\infty}$ を f において負方向の無限遠に位置するようなある点として、e と $ABCD$ の交点である V は、透視図における $X_{-\infty}$ の像であると結論される。

g 上の動点 Y の動きからも同様に、$Y_{-\infty}$ を g において負方向の無限遠に位置するようなある点として、V が $Y_{-\infty}$ の像であることが結論される。

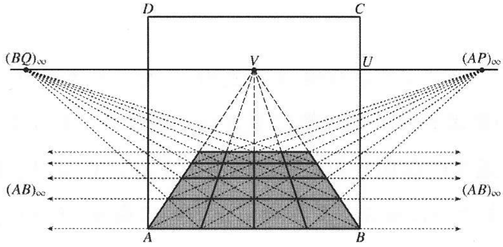
$X_{-\infty}$ と $Y_{-\infty}$ の像は V において一致する。とすれば、ここでその存在が仮定された $X_{-\infty}$ と $Y_{-\infty}$ 自体、一致している筈である。すなわち平行な2本の直線 f と g は、負方向の無限遠に位置するようなある点において、交わっていなくてはならない。

思考実験を更に続けよう。今度は f 上の X を、F から正方向に動かしてみる。X' は画面の領域を外れて次第に下方へと向かい、X が基準点 F_0 に達するに至り、遂に（通常の意味での）交点は消滅する。X が F_0 を過ぎると、X' は突然、画面の遥か上方に飛ぶ。X が更に正方向に進み、F から遠ざかるにつれ、X' は下降してある時点から再び画面の領域に戻り、改めて V に近付いていく。

$X_{+\infty}$ を f において正方向の無限遠に位置するようなある点として、負方向の場合と同じ理由で、V は $X_{+\infty}$ の像である。また、$Y_{+\infty}$ を g において正方向の無限遠に位置するようなある点として、V は $Y_{+\infty}$ の像でもある。これもまた負方向の場合と同じ理由で、f と g は、正方向の無限遠に位置するようなある点において、交わらなくてはならない。

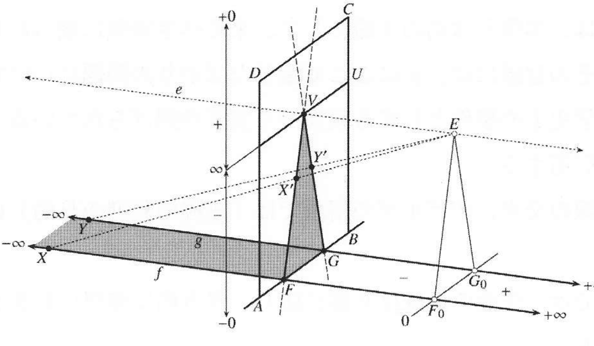
f と g が交わるとされる、正方向の無限遠点 $F_{+\infty} = G_{+\infty}$ も、負方向の無限遠点 $F_{-\infty} = G_{-\infty}$ も、その像は V において一致する。このことは、同一平面上の平行でない2本の直線がただ一つの通常の点で交わる（例えば FV と GV が V で交わる）のと全く同様に、同一平面上の平行な2本の直線も、ただ一つの、かつ直線の双方 向の無限遠に位置するような、ある理念的な点で交わることを示唆しているように思われる。この点を、直線上の**無限遠点**と呼ぶことにしよう。

改めて正方形の格子 $ABPQ$ に戻ると、ここには平行な直線の集合として、AB と平行な直線の集合 $\mathcal{E}_1$ 、AB と垂直な直線な集合 $\mathcal{E}_2$ だけでなく、対角線 AP と平行な直線の集合 $\mathcal{E}_3$ 、対角線 BQ と平行な直線の集合 $\mathcal{E}_4$ も含まれる。透視図を実際に作図すると、$\mathcal{E}_3$ の諸直線の像も、$\mathcal{E}_4$ の諸直線の像も、それぞれ直線 UV 上のある点において交わることが判明する。ここまでの考察に拠れば、それらの交点は、それぞれ AP ないし BQ 上の無限遠に位置するような、ある理念的な点 $(AP)_\infty$, $(BQ)_\infty$ の像でなくてはならない。AB と平行な、従って UV とも平行な直線の集合 $\mathcal{E}_1$ についても、その諸直線の交点である無限遠点 $(AB)_\infty$ の像が UV 自身の無限遠点であると考えれば、推論は首尾一貫したものとなるだろう。



こうして透視図上の直線 UV は、地面上の諸方向の無限遠点を含むような直線、通常「地平線」と呼ばれるような、経験の世界には属さない、ある理念的な直線の表象であることが結論される。この直線を、地面上の**無限遠線**と呼ぶことにしよう。

最後に、地面上の2本の平行な直線 f と g から成るとして与えられた図形の透視図を、今度は逆の方向から解釈してみる。地面に立てられた透明な板 $ABCD$ に、底辺 FG が地面 AB に接しているような三角形 FGV と、V を通り地面と平行な直線 UV が描かれているとする。板から離れた場所で、点 E を V と地面から同じ高さに取る。直線 EV や平面 EUV は（通常の意味では）地面と交わらない。このときろうそくの炎や裸電球のような、拡散する光の光源を E に置いたとして、三角形 FGV や直線 UV は、地面にどのような影を投げるだろうか。



線分 FV 上で動点 X' を、線分 GV 上で動点 Y' を動かし、直線 EX', EY' と地面との交点 X, Y の軌跡を辿ってみる。直線 EV を e と改名し、平面 eF, eG と地面との交線をそれぞれ f, g とすれば、X, Y は明らかに、それぞれ f, g の上を動いていく。f と g はそれぞれ e と平行なので、f と g 自体も互いに平行である。よって三角形 FGV の底辺 FG 以外の2本の辺 FV, GV は、地面上の平行な2本の直線を影に持つ。

三角形 FGV の F, G 以外の第三の頂点 V は直線 UV 上にあり、これらの点や直線は先に述べた通り、通常の意味では地面上に影を持たない。しかし、

上に述べられた意味での無限遠点・無限遠線の存在をここで認めるならば、V の影は、地面ないし平面 EUV 上の無限遠線上で、e, f, g と同じ方向に位置するような無限遠点という、ある理念的な点に見出されるだろう。

このように透視図法においては、通常の点で交わる平行でない直線の集合と、無限遠という、経験を超越した何処かで交わるとされるべき平行な直線の集合が、互いに融通無碍に交代し合うのである。透視図法とは、無限を可視化する装置であるとも言えるだろう。

5 『円錐曲線論計画草稿』と射影幾何学

デザルグの主著は、直訳すれば『円錐と平面の交わりの諸事象生起達成計画草稿』（以後『計画草稿』と略記）とでもなろう、異様な題名を持つ円錐曲線論として、1639 年に発表された[*9]。『計画草稿』の円錐曲線論としての特異性を論じることは、本稿とは別の主題として、来るべき別稿に譲られるべきであるとはいえ、その冒頭には、正にここで論じたばかりの問題について、極めて大胆な、幾何学史上の事件としても画期的な宣言が掲げられている。重要さに鑑み、全文を引用する。

最初は直線の交点、デザルグの用語では「直線の整列の目的」に関するものである。

> ここでは、任意の直線は必要に応じ、双方向に無限に延長されるものと解される。
>
> 直線におけるこのような双方向への無限遠の延長は、ここでは直線の双方向に沿っての、点の一直線の並びとして表象される。 複数の直線について、これらが全て平行であるか、またはある一つの点へと傾いているかであると解させるために、ここでは、それらの直線は互いに同一の**整列**（強調はデザルグによる。引用中、以下同様。訳語の選択については脚注を参照）に属していると言われる。これを通じて、それらの直線は二種類のど

---

*9　Girard Desargues, *Brouillon Projet d'une Atteinte aux Événements des Rencontres d'un Cône avec un Plan*, 1639（sigle : BP）.

ちらの位置にあっても、いわば一つの場所に向かっていることが理解されよう。

二種類のどちらの位置にあっても、複数の直線がこのように向かっていくと解される場所が、ここでは直線の整列の**目的**と名付けられる。

複数の直線が互いに平行であるような直線間の位置の種類を解させるために、ここでは、それらの直線は同一の整列に属すると言われ、その目的は、各直線の双方向の無限の距離にある。

複数の直線が同一の点に傾いているような直線間の位置の種類を解させるために、ここでは、それらの直線は同一の整列に属すると言われ、その目的は、各直線において有限の距離にある。

このように、同一平面上の任意の２本の直線は互いに同一の整列に属し、その目的は有限か無限の距離にある[*10]。

---

*10 《Ici toute ligne droite est entendue allongée au besoin à l'infini d'une part et d'autre.
Un semblable allongement à distance infinie d'une part et d'autre en une droite, est ici représenté par une rangée de points alignés d'une part et d'autre en suite de cette droite.

Pour donner à entendre de plusieurs lignes droites, qu'elles sont toutes entre elles ou bien parallèles, ou bien inclinées à un même point, il est ici dit que toutes ces droites sont d'une même *ordonnance*, par où l'on concevra de ces pluisiers droites, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, elles tendent comme toutes à un même endroit.

L'endroit auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droites en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de positions, est ici nommé *but* de l'ordonnance de ces droites.

Pour donner à entendre l'espèce de position d'entre plusieurs droites, en laquelle elles sont toutes parallèles entre elles, il est ici dit que toutes ces droites sont entre elles d'une même ordonnance, dont le but est à distance infinie en chacune d'elles d'une part et d'autre.

Pour donner à entendre l'espèce de position d'entre plusieurs droites, en laquelle elles sont toutes inclinées à un même point, il est ici dit que toutes ces droites sont entre elles d'une même ordonnance, dont le but est à distance finie en chacune d'elles.

Ainsi deux quelconques droites en un même plan sont entre elles d'une même ordonnance, dont le but est à distance ou finie, ou infinie.》ibid., p.1. Souligné par Desargues.

『計画草稿』の簡単な紹介も兼ね、直線や平面の集合である ordonnance を「整列」と訳した背景を述べる。『計画草稿』では円錐曲線 の極と極線の対がそれぞれ but と traversale、また but を通る円錐曲線の割線の集合が、その traversale に対する ordonnées の ordonnance と呼ばれる。Traversale 上に整列するように並び、but で交わる ordonnées は全て、円錐曲線に対して様々な性質を共有する。円錐曲線を 横断する traversale はその特殊例に直径、すなわち無限遠点を but とし、円錐曲線の中心を通る直線を含む。直径に対する ordonnées はアポロニオスの円錐曲線論で枢要な役割を担い、その流れを汲むデカルト・フェルマー流の解析幾何学における鍵概念、軸に直交する「座 標 ordonnées」へと連なっていく。これに対し、デザルグにとって、直径の特権化とは円錐曲線論の一般化を妨げる、アポロニオスにおいて克服されるべき否定的契機でしかなかった。無限遠点と通常の点を同列に、ということは直径を traversale の単なる特殊例として論じることで、楕円・放物線・双曲線の区別を問わない、より普遍的な円錐曲線論を展開することこそ、『計画草稿』の眼目となろう。以上の事情を踏まえ、（あ

次は平面の交線、デザルグの用語では「平面の整列の軸」に関するものである。

ここでは、任意の平面も同様に、全方向に無限に延長されるものと解される。平面のこのような全方向への無限遠の延長は、ここでは同一平面の全方向に撒き散らされた数々の点として表象される。

複数の平面について、これらが全て平行であるか、またはある一つの直線へと傾いているかであると解させるために、ここでは、それらの平面は互いに同一の**整列**に属していると言われる。これを通じて、それらの平面は二種類のどちらの位置にあっても、いわば一つの場所に向かっていることが理解されよう。

二種類のどちらの位置にあっても、複数の平面がこのように向かっていくと解される場所が、ここでは平面の整列の**軸**と名付けられる。

複数の平面が互いに平行であるような平面間の位置の種類を解させるために、ここでは、それらの平面は同一の整列に属すると言われ、その軸は、各平面において無限の距離にある。

複数の平面が同一の直線に傾いているような平面間の位置の種類を解させるために、ここでは、それらの平面は同一の整列に属すると言われ、その目的は、各平面において有限の距離にある。

このように、任意の2個の平面は互いに同一の整列に属し、その軸は各平面において、有限か無限の距離にある[*11]。

る traversale 上の ordonnées の）ordonnance に対し、解析幾何学の「座標」的な含みを出来るだけ感じさせない（「横断線」上の「整列線」の）「整列」という訳語を、仮に当てておく。

*11 《Ici tout plan est pareillement entendu étendu de toutes parts à l'infini. Une semblable étendue d'un plan à l'infini de toutes parts, est ici représentée par un nombre de points semés de toutes parts au même plan.

Pour donner à entendre de plusieurs plans, qu'ils sont tous entre eux ou bien parallèles, ou bien inclinés à une même droite, il est ici dit que toutes ces plans sont entre eux d'une même *ordonnance*, par où l'on concevra de ces pluisiers plans, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, ils tendent comme tous à un même endroit.

L'endroit auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs plans en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de positions, a ici nom *essieu* de l'ordonnance de ces droites.

Pour donner à entendre l'espèce de position d'entre plusieurs plans, en laquelle ils sont tous parallèles entre eux, il est ici dit que toutes ces plans sont entre eux d'une même ordonnance, dont l'essieu est en chacun d'eux à distance infinie.

Pour donner à entendre l'espèce de position d'entre plusieurs plans, en laquelle ils sont tous inclinés à une même droite, il est ici dit que toutes ces plans sont entre eux d'une même ordonnance, dont l'essieu est en chacun d' eux à distance finie.

すなわち透視図法において暗黙のうちに了解されていた、とはいえその素性が知られているとは到底言い難い（例えば直線において双方向で無限遠点が一致するとは、如何に解されるべきなのか？ 直線は円環のように閉じているのか？）無限遠点・無限遠線の存在を、デザルグは自らの構想する、正にこれから開陳されようとしている幾何学の基礎的構成要素として、明示的に要請するのである。これらの引用の直前、『計画草稿』冒頭から二番目の段落の言葉は、読者を挑発するかのようである。

> ここで演繹される事柄、またその演繹の仕方から、各人は適当と思われることを考え、そして次のことを見て取るだろう。すなわち、理性は一方で無限量と、他方でその両端が一つに帰する程小さな量とを知ろうと努めるが、知力は道を失う。それは、それらの量の想像を絶する大きさや小ささのためだけでなく、通常の理性の用法により、それらが一体如何なるものか理解不可能な性質を導くべく、知力が余儀なくされるためでもある[*12]。

ともあれ、デザルグの要請を２個の公理として、現代風な語法で要約しておこう。

公理 1　同一平面上の任意の２本の異なる直線は、ただ１個の点で交わる。２本の直線が平行であれば、交点は無限遠点であり、平行でなければ、交点は通常の点である。

公理 2　任意の２個の異なる平面は、ただ１本の直線で交わる。２個の平面が平行であれば、交線は無限遠線であり、平行でなければ、交線は通常の直線である。

透視図法による変形の前後で、図形における線分の長さ、角の大きさ、面積等、

Ainsi deux quelconques plans sont entre eux d'une même ordonnance, dont l'essieu est en chacun d'eux à distance ou finie, ou infinie. 》Ibid. Souligné par Desargues.

*12 《 Chacun pensera ce qui lui semblera convenable, ou de ce qui est ici déduit, ou de la manière de le déduire ; et verra que la raison essaie à connaître des quantités infinies d'une part, ensemble des si petites que leurs deux extrémités opposées sont unies entre elles ; et que l'entendement s'y perd, non seulement à cause de leurs inimaginables grandeur et petitesse, mais encore à cause que le raisonnement ordinaire le conduit à en conclure des propriétés, dont il est incapable de comprendre comment c'est quielles sont. 》Ibid.

様々な量の大小は変化しても、共線・共点関係のような、点・直線・平面の間の相互的な位置関係は、元のまま失われることがない。このように射影・切断の操作において不変のまま保たれる図形の性質を研究対象とする幾何学は、今日、射影幾何学と呼ばれるが、ここでデザルグは、第一級の技師として深く通じていた透視図法を踏まえ、「平行線は交わる」という、彼以前には存在しなかった幾何学を基礎付けているのである。

これらの公理からの帰結は遠大である。第一に、直線·平面が平行であるか、交わるかという、ユークリッド幾何学において質的だった差異が、新たな幾何学においては、高々有限量と無限量の差という、透視図法により相互変換が可能な、単に量的な差異に過ぎなくなる。このことは例えば、第6節において双三角形定理の新たな証明の過程で示されるように、個別的事象の例外性に由来する議論の錯綜を解消し、幾何学理論により高度な普遍性を与えるための、有効な手立てとなるだろう。

第二に、ユークリッド『原論』の第一公準

任意の2個の異なる点は、ただ1本の直線で結ばれる。

と公理 1 とを比較すると、点と直線に関して、両者の完全な対称性に気付かされる。射影幾何学の命題は、これらの公理・公準から導かれる限り、点と直線に関して完全に対称的である。すなわち

点	$\Longleftrightarrow$	直線
直線の上にある	$\Longleftrightarrow$	点を通る
2本の直線が交わる	$\Longleftrightarrow$	2個の点を結ぶ
複数の点が共線	$\Longleftrightarrow$	複数の直線が共点
多角形の頂点や辺	$\Longleftrightarrow$	多辺形の辺や頂点

等の簡単な語彙変換により、点について真である命題からは直線について真である命題が、直線について真である命題からは点について真である命題が、自動的に導かれる。この美しく強力な性質を、射影幾何学における**双対原理**という。例えば双三角形定理

2個の異なる三角形について、対応する「頂点」の3本の「結線」が「共点」ならば、対応する「辺」の3個の「交点」は「共線」である。

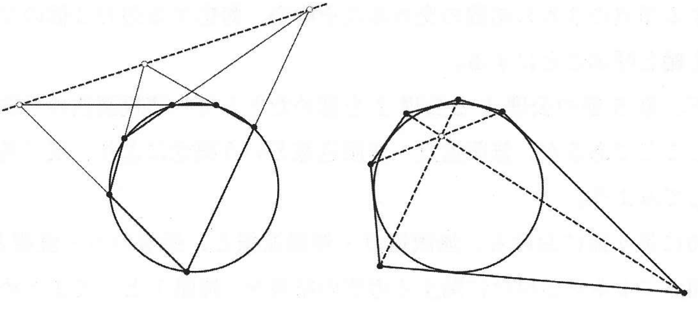
を、上の表に従って翻訳した双対

2個の異なる三角形について、対応する「辺」の3個の「交点」が「共線」ならば、対応する「頂点」の3本の「結線」は「共点」である。

とは、双三角形定理の逆に他ならず、その意味で、この定理は**自己双対**的である。これ以外にも、双三角形定理の重層的な双対性は第3節で示した通りである。もう一つ、双対原理の鮮烈、かつ歴史的に重要な例として、幾何学者デザルグの最も輝かしい弟子、10歳代半ばの神童パスカルが1639年の『計画草稿』読後、翌40年に発表した命題[*13]と、その双対[*14]を挙げておく。

パスカルの定理　任意の円錐曲線に「内接」する「六角形」について、相対する3組の「辺」の「交点」は「共線」である。

ブリアンションの定理　任意の円錐曲線に「外接」する「六辺形」について、相対する3組の「頂点」の「結線」は「共点」である。



射影幾何学者としてのパスカルについても、これを論じる別稿が改めて用意されよう。

19世紀初頭、上の定理に名を残すシャルル・ジュリアン・ブリアンションを始め、ジョゼフ・ディアズ・ジェルゴンヌ、ジャン・ヴィクトル・ポンスレ等の幾何学者は、双対原理を駆使し、射影幾何学の華麗な体系 を展開するが、逆に言えば、彼らの師に当たる、エコール・ポリテクニック（フランス革命下

*13　Blaise Pascal,《 Essai pour les Coniques 》, 1640 ; *Œuvres complètes*, éd. par J. Mesnard, Desclée de Brouwer, 4 vol., 1964-1992, t.II, p.221-239.

*14　Charles Julien Brianchon,《 Sur les Surfaces courbes du second Degré 》, in J*ournal de L'École polytechnique*, cahier 13, 1806, p.297- 311.

に創設された、高級軍人・技師養成のための、理工系の最高学府）初代数学教官ガスパール・モンジュにより再発掘されるまで、デザルグの幾何学は約一世紀半もの間、ほぼ完全に忘却の霧に包まれたままだった。このことは却って、同時代の常人には窺い得なかった、デザルグの知的創造力の並外れた大胆さを証し立てているように思われる。

6 透視図法による定理の証明

双三角形定理の自己双対性により、2個の三角形について、「対応する頂点の3本の結線が共点」「対応する辺の3個の交点が共線」という2個の条件は、互いに他の必要十分条件になっている。ここではそのいずれか一方の条件を（ということは他方の条件も）満たす2個の三角形を、19世紀以後の射影幾何学の流儀に従って、**透視三角形**と呼ぶことにする。また、透視三角形において、対応する頂点の3本の結線の交わる点を**中心**、対応する辺の3個の交点を結ぶ直線を**軸**と呼ぶことにする。

以下、第5節の公理1と公理2を認めたとして、透視図法の手法、あるいは同じことであるが、無限遠点・無限遠線という概念により、双三角形定理を証明してみよう。

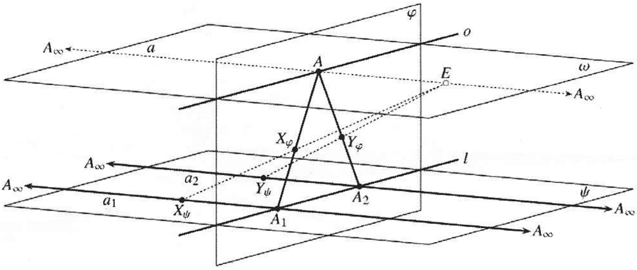
最初に第4節における、無限遠点・無限遠線と、通常の点・直線との間の、透視図法による対応付けに関する考察の結果を、補題1としてまとめておく。

補題1 直線 l で交わる2個の平面 φ, ψ と、それらのいずれにも属さない点 E について、E を通り ψ と平行な（すなわち、ψ 上の無限遠線 o_∞ を通る）平面を ω とし、ω と φ の交線を o とする。このとき以下が成り立つ。

(1) ψ 上に2本の平行な（すなわち、o_∞ 上のある無限遠点 A_∞ で交わる）直線 a_1, a_2 が与えられたとして、それらの直線と l との交点を A_1, A_2 とする。また、a_1, a_2 と平行で（すなわち、A_∞ を通り）E を通る ω 上の直線を a とし、a と o の交点を A とする。このとき、E からの a_1, a_2 の射影を φ で切断した像は、それぞれ AA_1, AA_2 である。

(2) o 上に点 A が、l 上に2個の異なる点 A_1, A_2 が与えられたとして、直線

EA を a と名付け、a と平行で A_1, A_2 を通る ψ 上の直線を、それぞれ a_1, a_2 とする（この場合も、a, a_1, a_2 の無限遠点を A_∞ とする）。このとき、E からの AA_1, AA_2 の射影を ψ で切断した像は、それぞれ a_1, a_2 である。



(1) では o_∞ が o に（o_∞ 上の A_∞ が o 上の A に）、(2) では逆に、o が o_∞ に（o 上の A が o_∞ 上の A_∞ に）写されている。すなわち補題 1 は

$$o \mathrel{\overline{\wedge}} o_\infty \quad \text{あるいは} \quad A \mathrel{\overline{\wedge}} A_\infty$$

となるような図形の作図法を、具体的に示すものである。

次の補題 2 は、ユークリッド幾何学の範囲で簡単に証明される。

補題 2　同一平面上の異なる 2 個の三角形について、対応する頂点の 3 本の結線が共点で、対応する 2 組の辺がそれぞれ平行ならば、残りの 1 組の辺も平行である。

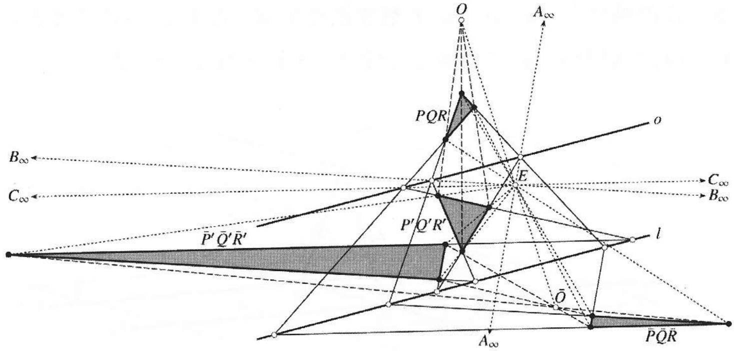
補題 2 の証明　三角形 PQR と $P'Q'R'$ について、PP', QQ', RR' が点 O を通り、QR と $Q'R'$、RP と $R'P'$ をそれぞれ平行とする。仮定により三角形 OQR と $OQ'R'$ は相似、三角形 ORP と $OR'P'$ も相似なので

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{OR}{OR'}, \quad \frac{OR}{OR'} = \frac{OP}{OP'} \quad \Rightarrow \quad \frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'},$$

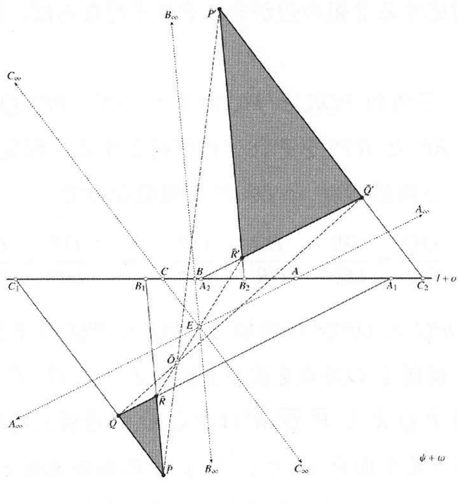
ゆえに三角形 OPQ と $OP'Q'$ は相似で、PQ と $P'Q'$ は平行である。 □

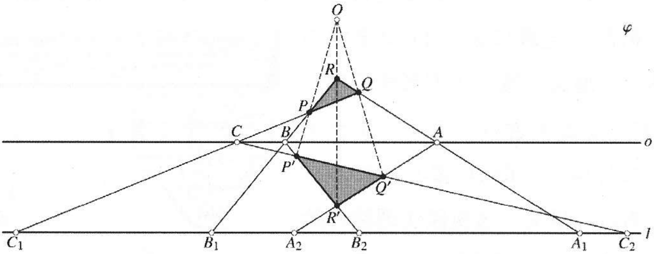
定理の証明 4　補題 2 の各点を次頁上図のように $\overline{O}$, $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$, $\overline{P'}$, $\overline{Q'}$, $\overline{R'}$ と改名する。三角形 $\overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R}$ と $\overline{P'}\,\overline{Q'}\,\overline{R'}$ は中心 $\overline{O}$ の透視三角形で、その軸は、これらの三角形の属する平面を ψ として、ψ 上の無限遠線 o_∞ である。$\overline{Q}\,\overline{R}$ 方向、$\overline{R}\,\overline{P}$ 方向、$\overline{P}\,\overline{Q}$ 方向の o_∞ 上の無限遠点を、それぞれ A_∞, B_∞, C_∞ とする。これら

の無限遠線・無限遠点を、補題 1 の手法で通常の直線や点に写してみよう。



l を ψ 上の適当な直線とする。l で ψ と交わる平面 φ 上に、l と平行な直線 o を取る。o を通り ψ と平行な 平面 ω 上に、ψ にも φ にも属さない点 E を取る。E を視点とする ψ から φ への透視図法を Π_E とする。Π_E により直線の共点関係が保たれるのは明らかなので、$\overline{P}\,\overline{P'}$, $\overline{Q}\,\overline{Q'}$, $\overline{R}\,\overline{R'}$ の像である PP', QQ', RR' は、$\overline{O}$ の 像である O で交わる。すなわち PQR と $P'Q'R'$ は透視三角形で、その軸、ψ 上の無限遠線 o_∞ の Π_E による像 は、補題 1 により、φ 上の o と一致する。





ここで $A_\infty, B_\infty, C_\infty$ の Π_E による像を、それぞれ A, B, C とする。Π_E により点の共線関係が保たれるのは明らかなので、

$$A = \Pi_E(A_\infty) = \Pi_E(\bar{Q}\bar{R} \cdot \bar{Q}'\bar{R}') = QR \cdot Q'R',$$
$$B = \Pi_E(B_\infty) = \Pi_E(\bar{R}\bar{P} \cdot \bar{R}'\bar{P}') = RP \cdot R'P',$$
$$C = \Pi_E(C_\infty) = \Pi_E(\bar{P}\bar{Q} \cdot \bar{P}'\bar{Q}') = PQ \cdot P'Q'$$

は全て $o = \Pi_E\,(o_\infty)$ の上にある。 □

与えられた透視三角形の平面 ψ と、それに平行な ω を重ね合わせて描くと、$\overline{Q}\,\overline{R}$ や $\overline{Q'}\,\overline{R'}$ と EA、$\overline{R}\,\overline{P}$ や $\overline{R'}\,\overline{P'}$ と EB、$\overline{P}\,\overline{Q}$ や $\overline{P'}\,\overline{Q'}$ と EC が、それぞれ実際に平行であることが確かめられる

$$l \cdot \bar{Q}\bar{R} = A_1, \quad l \cdot \bar{R}\bar{P} = B_1, \quad l \cdot \bar{P}\bar{Q} = C_1$$
$$l \cdot \bar{Q}'\bar{R}' = A_2, \quad l \cdot \bar{R}'\bar{P}' = B_2, \quad l \cdot \bar{P}'\bar{Q}' = C_2$$

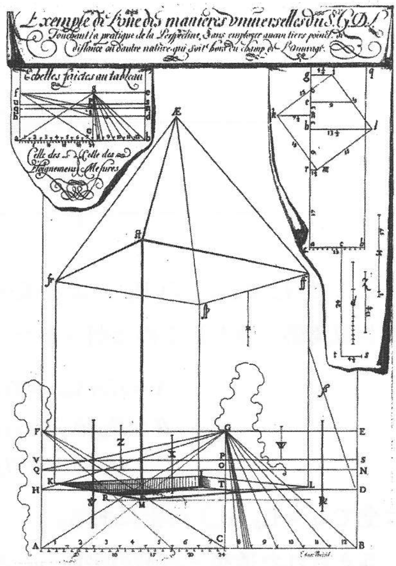
とおき、三角形 AA_1A_2 , BB_1B_2 , CC_1C_2 に着目すれば、補題 1 の図との関連が、より明瞭に理解されよう。

7　1636 年の『透視図法の普遍的方法』

第 5 節冒頭でも述べた通り、いずれも題名に『透視図法の普遍的方法』という表現を含む二篇、デザルグにとって最初の公刊論文（1636 年）も、双三角形定理が最初に発表された、デザルグの弟子である銅版画家アブラアム・ボスによる著作（1648 年）も、高度な手工技芸を持つ職工たちを主対象とした、応用幾何学の一つとしての透視図法論なのだった。

デザルグの 1636 年の論文は二つ折り本で 1 枚の図版と 12 頁の本文から成る。

図版には立方体の上に四角錐を重ねた、尖塔状の構造物の透視図が作図されているが、術語の定義に続く11頁までの文書本体は、地面を覆う正方形格子の作図 に関する記述を含み、アルベルティの「正則な作図」の改良 案とされるべきものである。事実、透視図法理論の始祖が示す方式では、画面構成の基準となる点 E が画面の枠外にあり、実地での適用には困難が伴うように思われる。これに対し、デザルグが提示するのは「画面外の第三者的な点や距離、その他如何なる事物も用いずに透視図法を実践するための」という、長い題名が示す通りの方法である。



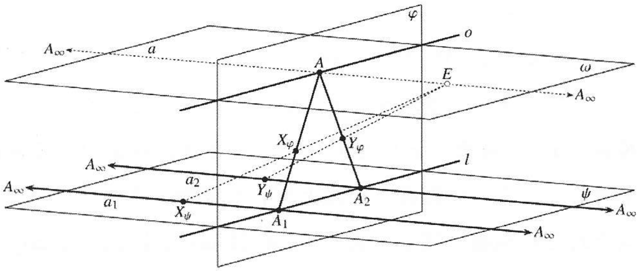
双三角形定理との関わりで特筆に価するのが11頁以後、職工たちとは別に「観想的な人々」、すなわち学者たちに宛て、「他の題材でならば別の形で述べられるが、ここでは透視図法に特化された幾つかの命題」が、図解の無い文章だけで述べられた、「残りの部分」である。その「諸々の軌跡を多く含む、重要な諸命題の蟻塚のような犇き[*15]」とは実のところ、第6節の補題1を一般化した内容を場合分けと共に展開したものに他ならず、3年後の『計画草稿』における直線や平面の「整列」、すなわち平行か交わるかを問わない集合の概念と直に連なっている。これも資料的価値の高いものとして、全文を引用する。図に加え、論理構成を示す段落番号と括弧内の注は、全て引用者による補足である。

最初に視線の定義と、点の透視図像について述べられる。

---

*15 《En ce reste de place, les contemplatifs auront quelques propositions, lesquelles peuvent être énoncées autrement pour diverses matières, mais elles sont accomodées ici pour la perspective, et la démonstration en est assez intelligible sans figure, puisque toutes les lignes y sont encore entendues droites, et les tableaux toujours plats. Il est vrai qu'enfin c'est une fourmillière de grandes propositions, abondante en lieux.》, MUD, p.11.

1. 不動の中心（E）を通る直線を考え、その未限定の直線は中心以外ではどこでもあらゆる方向に動くとする（EA, EX_ψ , EY_ψ 等）。こうした直線はここでは**視線**（強調はデザルグ）と言われ、必要に応じ、他のどのような直線に対してであれ平行に引かれる（a_1 , a_2 に対する $a = EA$ 等）。



2. 描かれる対象が点で、対象となる諸点（X_ψ , Y_ψ ）と目（E）から画面まで互いに平行な直線（E を通る a、X_ψ を通る a_1 、Y_ψ を通る a_2 ）が引かれたとき、これらの対象の像は、平行線（a, a_1 , a_2 ）と 画面（φ）との交点（A, A_1 , A_2 ）を通って引かれる直線の上にある（X_φ は AA_1 上に、Y_φ は AA_2 上にある）。というのも、平行線とその直線は互いに同じ平面上に（直線 a, a_1 , AA_1 は平面 aa_1 上に、直線 a, a_2 , AA_2 は平面 aa_2 上に）あるからである [*16]。

次に直線の「整列」が、平行な「整列」と交わる「整列」とに分けられる。

3. 描かれる対象が直線であるとき、それらの直線は互いに平行であるか（3.1)、傾いているか（3.2）のどちらかである（補題 1 の図は 3.1 の例。3.2 は a_1 ・ a_2 が無限遠点 A_∞ ではなく、ψ 上の通常の点と なる場合）[*17]。

平行な直線の「整列」の透視図像は以下の通りである。

---

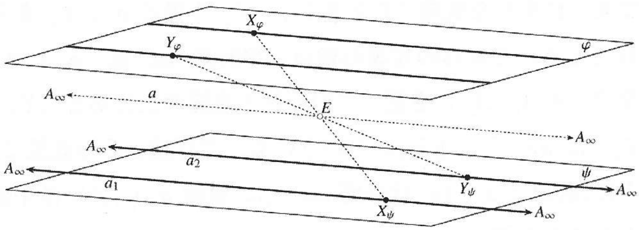
*16 《 Ayant imaginé qu'au centre immobile de l'œil passe une ligne indéterminée et mobile ailleurs de son long en tout sens, une telle ligne est ici nommée *ligne de l'œil*, laquelle au besoin est menée parallèle à telle autre ligne que ce soit.

Quand le sujet est un point, et que des points de sujet et de l'œil sont menées jusqu'au tableau des lignes parallèles entre elles, l'apparence du sujet est en la ligne menée par les points auxquels ces parallèles rencontrent le tableau, d'autant que ces parallèles et cette ligne ainsi menée au tableau sont en un même plan entre elles. 》Mud, p.11

*17 《 Quand le sujet est des lignes, elles sont, ou bien parallèles, ou bien inclinées entre elles. 》Ibid.

3.1. 対象である直線（a_1 , a_2 ）が互いに平行であるとき、それらに平行な視線（a）は画面（φ）と平行 であるか（3.1.1)、平行でないか（3.1.2）のどちらかである（補題 1 の図は 3.1.2 の例。3.1.1 は o が通常の直線ではなく、無限遠線となる場合）が、それらの直線は常に、その視線とそれぞれ同じ平面上に（a_1 と a は aa_1 上に、a_2 と a は aa_2 上に）ある。共通の軸である視線（a）で、それらの平面（aa_1 , aa_2 ）が全て交わるのである。

3.1.1. 対象である直線（a_1 , a_2）が互いに平行で、それらと平行に引かれた視線（a）が画面（φ）と平行であるとき、対象である直線の像は互いに平行な、また元の直線、視線と平行な直線である。というのも、元の直線はそれぞれ視線と同じ平面上に（a_1 は aa_1 上に、a_2 は aa_2 上に）あり、共通の軸である視線（a）でそれらの平面が全て交わり、それらの平面は全て、画面という別の同一の平面（φ）で切断されるからである。

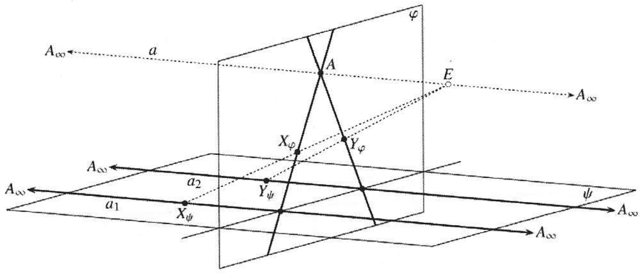


3.1.2. 対象である直線（a_1 , a_2 ）が互いに平行で、それらに平行に引かれた視線（a）が画面（φ）と 平行でないとき、対象である直線の像は、視線（a）と画面（φ）との交点（A）へと向かう。というの も、元の直線はそれぞれ視線と同じ平面上に（a_1 は aa_1 上に、a_2 は aa_2 上に）あり、共通の軸である視線（a）でそれらの平面が全て交わり、それらの平面は全て、画面という別の同一の平面（φ）で切断されるからである[*18]。

---

*18 《 Quand des lignes sujet sont parallèles entre elles, la ligne de l'œil menée parallèle à icelles, est ou bien parallèle, ou bien non parallèle au tableau, mais toujours chacune de ces lignes sujet est en un même plan avec cette ligne de l'œil, en laquelle tous ces plans s'entrecoupent ainsi qu'en leur commun essieu.

Quand des ligne sujet sont parallèles entre elles, et que la ligne de l'œil menée parallèle à icelles est parallèle au tableau, les apparences de ces lignes sujet sont des lignes parallèles entre elles, aux lignes sujet, et à la ligne de l'œil, à cause que chacune de ces lignes sujet est en un même plan avce cette ligne de l'œil, en laquelle tous ces



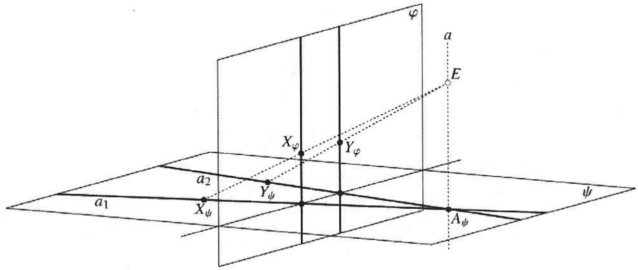
交わる直線の「整列」の透視図像は以下の通りである。

3.2. 互いに傾いた直線（a_1 , a_2 ）が全て、ある 1 個の点（ここで述べられた、補題 1 の図に描かれていない ψ 上の点を A_ψ とする）に向かうとき、この点に引かれた視線（$a = EA_\psi$ ）は、画面（ φ ）と平行であるか（3.2.1)、平行でないか（3.2.2）のどちらかであるが、それらの直線は常に、その視線とそれぞれ同じ平面上に（a_1 と a は aa_1 上に、a_2 と a は aa_2 上に）ある。共通の軸である視線（a）で、それらの平面（aa_1 , aa_2 ）が全て交わるのである。

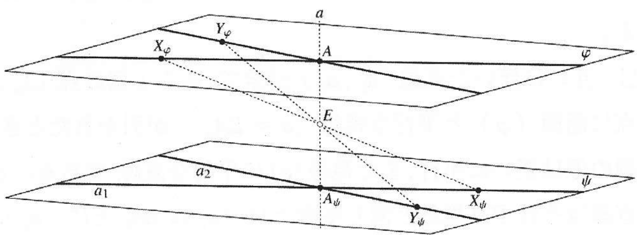
3.2.1. 互いに傾いた直線（a_1 , a_2 ）が全て、ある 1 個の点（A_ψ ）に向かい、その点に画面（ φ ）と平行な視線（$a = EA_\psi$ ）が引かれたとき、対象である直線の像は互いに平行、また視線（a）に平行な直線 である。というのも、元の直線はそれぞれ視線と同じ平面上に（a_1 は aa_1 上に、a_2 は aa_2 上に）あり、共通の軸である視線（a）でそれらの平面が全て交わり、それらの平面は全て、画面という別の同一の平面（ φ ）で切断されるからである。

plans s'entrecoupent ainsi qu'en leur commun essieu, et que tous ces plans sont coupés d'un autre même plan le tableau.

Quand des ligne sujet sont parallèles entre elles, et que la ligne de l'œil menée parallèle à icelles n'est pas parallèle au tableau, les apparences de ces lignes sujet sont des lignes qui tendent toutes au point auquel cette ligne de l'œil rencontre le tableau, d'autant que chacune de ces lignes sujet est en un même plan avce cette ligne de l'œil, en laquelle tous ces plans s'entrecoupent ainsi qu'en leur commun essieu, et que tous ces plans sont coupés d'un autre même plan le tableau. 》Ibid., p.11-12.



3.2.2. 互いに傾いた直線（a_1，a_2）が全て、ある１個の点（A_ψ）に向かい、その点に画面（φ）と平行でない視線（$a = EA_\psi$）が引かれたとき、対象である直線の像は全て、その視線（a）と画面（φ）との交点（A）へと向かう。というのも、元の直線はそれぞれ視線と同じ平面上に（a_1 は aa_1 上に、a_2 は aa_2 上に）あり、共通の軸である視線（a）でそれらの平面が全て交わり、それらの平面は全て、画面という別の同一の平面（φ）で切断されるからである[*19]。



*19 《Quand des lignes sujet inclinées entre elles tendent toutes à un point, la ligne de l'œil menée à ce point est, ou bien parallèle, ou bien non parallèle au tableau, mais toujours chacune de ces lignes sujet est en un même plan avec cette ligne de l'œil, en laquelle tous ces plans s'entrecoupent quisi qu'en leur commun essieu.

Quand des lignes sujet inclinées entre elles tendent toutes à un point, auquel ayant mené la ligne de l'œil, elle est parallèle au tableau, les apparences de ces lignes sujet sont des lignes parallèles entre elles, et à la ligne de l'œil, à cause que chacune de ces lignes sujet est en un même plan avce cette ligne de l'œil, en laquelle tous ces plans s'entrecoupent ainsi qu'en leur commun essieu, et que tous ces plans sont coupés d'un autre même plan le tableau.

Quand des lignes sujet inclinées entre elles tendent toutes à un point, auquel ayant mené la ligne de l'œil, elle n'est pas parallèle au tableau, les apparences de ces lignes sujet sont des lignes qui tendent toutes au point auquel cette ligne de l'œil rencontre le tableau, d'autant que chacune de ces lignes sujet est en un même plan avce cette ligne de l'œil, en laquelle tous ces plans s'entrecoupent ainsi qu'en leur commun essieu, et que tous ces plans sont coupés d'un autre même plan le tableau.》Ibid.

直線の「整列」を現代風に**線束**と呼ぶことにして、以上の諸命題を要約する。

透視図法における平行線の定理　X を平面 ψ 上の無限遠点または通常の点とし、X で交わる線束を考える。φ を ψ と異なる平面、E を φ にも ψ にも属さない点とする。このとき E を視点とする ψ から φ への透視図法 により、ψ 上の線束は φ 上の次のような像に写される。

ψ 上の線束	EX と平行な φ 上の像	EX と交わる φ 上の像
平行な線束（X は無限遠点）	平行な線束（3.1.1）	交わる線束（3.1.2）
交わる線束（X は通常の点）	平行な線束（3.2.1）	交わる線束（3.2.2）

双三角形定理に対する本稿の証明 4 は、このうち 3.1.2 の直接的な適用例なのだった。

『透視図法の普遍的方法』発表当時、デザルグは二人の数学史上の巨人、オランダに隠棲中の哲学者ルネ・デカルト、南仏トゥールーズの高等法院法官ピエール・ド・フェルマーと並び、ミニム会修道士マラン・メルセンヌ神父が当時のパリ・ロワイヤル広場、現在のヴォージュ広場で、1630 年代半ばから主宰していた知的サークル、後のフランス王立科学アカデミーの、有力な構成員の一人だった。4 年後、少年パスカルが今日彼の名で呼ばれる幾何学命題を発表する舞台となったのも、その「パリ・アカデミー（Academia parisiensis）」である（左はテオバルド・シャルトランによる想像図、1886-89 年頃、ソルボンヌ大学正面階段。ヴォージュ広場を背景に、左からデザルグ、メルセンヌ、パスカル、デカルト。この架空の情景が描かれた時代、デザルグがデカルト・パスカルと並ぶ知性と認識されていたことが読み取れ

る）。デザルグの透視図法論は「1630年2月には出版允許状が得られていた[*20]」というボスの証言もあり、彼の幾何学の核を成す概念が、この時既に把握されていた可能性も否定できない。1634年、メルセンヌが南仏エクサン・プロヴァンスの天文学者ニコラ・クロード・ファブリ・ド・ベレスクに宛てた書簡には、出版の遅れを示唆して、

> 透視図法の小さな論文を間もなくお目に掛けられると思いますが、短いとはいえ、これまでご覧になったことがない程、味があるものです。紙への課税が高騰して、聞くところでは、事態の新たな進展があるまで、大部分の出版所は停止してしまったようです[*21]。

とある。また『透視図法の普遍的方法』と同年に出版され、デザルグも寄稿したメルセンヌの音楽書[*22]、『普遍和声』では、デザルグ執筆分「音楽の読み書きを教え学ぶ易しい方法[*23]」への解題として

> 卓越した幾何学者デザルグ氏が、直ぐに、簡単に理解できるように、子供の心に染み渡らせるのに適当と認められた言葉で書かれた、易しい方法から始めよう。[...] 以下の論考は、その著者が諸芸の実践を親しみやすく表現するのに長けているだけに益々評価に値し、力強い想像力と、理性の

---

*20 《 J'ai cru être obligé d'avertir ceux qui n'avaient pas vu les écrits de Monsieur Desargues, pour lesquels il a Privilège de mois de février 1630, que sa *Manière universelle de Perspective* est cela même dont ce livre dit en août 1643. 》A. Bosse, *La Pratique du Trait à Preuves de Monsieur Desargues pour la Coupe des Pierres en Architecture*, 1643, 2e page non numérotée dans *Au Liseur*.

*21 《 Vous verrez peut-être bientôt un petit traité de perspective, plus succulent que tout ce que vous en avez jamais vu, quoique plus court. L'impôt que l'on a mis sur le papier est si grand qu'une grande partie des presses ont cessé, à ce que l'on m'a dit, jusqu'à ce qu'on y ait mis ordre 》, Lettre de Mersenne à Peiresc, le 24 août 1634. Cité par René Taton,《 Desargues et le Monde scientifique de son Époque 》, in DST, p. 26.

*22 音楽と数学との結び付きは意外に見えて，実はそうではない。ピュタゴラス学派による音律研究以来、音楽は優れて数学的探求の 対象であり、ヨーロッパ中世を通じても、幾何・算術・天文学と並ぶ、大学教育における自由学芸の一つであった。17世紀に入っても、無限概念の発見に関してデザルグと共に論じられるべきヨハンネス・ケプラーは『宇宙の和声』（*Harmonicae Mundi*, 1619）で、諸惑星の軌道の間に見出される様々な比例関係に基づき、宇宙を精妙な音楽で満たそうと試みる。メルセンヌ周辺では、デカルトにしても、オランダで若い兵士だった彼を学問の世界に呼び戻した年長の恩人、イサーク・ベークマンに献呈された、彼にとって最初の論文が1618年の『音楽提要』（*Compendium Musicae*, AT. t.X, p.79-150）であり、パスカルにしても、姉ジルベルトの証言によれば僅か11歳で、皿のぶつかる音に触発され、一廉の論考をものしたとされる（Mes, t.I, p.573）。なお、1630年代当時、メルセンヌはベークマンとも親交があ り、デザルグの透視図法論もこのオランダの学者に送付されていた（Taton, op. cit., p.35.）。

*23 《 Méthode aisée pour apprendre et enseigner à lire et écrire la musique 》, in Marin Mersenne, *Harmon ie universelle*, Paris, 1636-1637, p.331-342.

優れた働きとを証し立てている。本稿以上に有益で高尚な話題、透視図法と各種の円錐の切断（円錐曲線。訳者注）に関する氏の考えがいつか明らかにされる暁には、その優れた能力が一層露わにされよう[*24]。

と記されている。幾何学を基礎に職工の育成に情熱を注ぐデザルグが教育者として得ていた声価だけでなく、幾何学者として彼が周囲から集めていた期待も読み取れる。1636 年の『透視図法の普遍的方法』もそれに応えるように、線束の透視図像を巡る上の諸命題に続き、

次の命題は、以上の諸命題のようには短く述べられない。

円錐の切断を透視図法で平面上に描くとして、2本の直線を引き、その像が、円錐の切断を表す図形 の軸となるようにすること[*25]。

という、円錐曲線論への予告と言うべき問題提起で閉じられている。

デザルグが透視図法に想を汲む斬新な幾何学を構想していた丁度その頃、デカルトとフェルマーの二人もまた、それぞれ別個に、近代数学史の方角を決することになる画期的な着想、代数学という強力な手段を備えた、いわゆる「解析幾何学」を完成させつつあった。メルセンヌからの『透視図法の普遍的方法』の送付に対し、フェルマーは「心地よく、優れた精神によるもの[*26]」と、デカルトは「反駁すべき点は無く、その新奇で明確な語法は評価に値する[*27]」との

---

*24 《 Je commence donc par une méthode fort aisée, laquelle Monsieur Desargues, excellent géomètre, a dressée en des termes qu'il a reconnus propres pour l'insinuer dans l'esprit des enfants, et pour la faire comprendre en peu de temps avec beaucoup de facilité, [...] le traité qui suit, dont je fais d'autant plus d'estime, que son auteur est plus propre pour exprimer la pratique des arts familièrement, avec des termes qui témoignent une puissante imagination, et un bon raisonnement, qu'il nous fera paraître quand il lui plaira en des sujets beaucoup plus utiles, et plus relevés que celui-ci, lorsqu'il fera part au public des pensées qu'il a pour la perspective et pour les différentes coupes de cône. 》Cité par Taton, op. cit., p.33-34.

*25 《 La proposition qui suit ne se devide pas si brièvement que celles qui précèdent.

Ayant à pourtraire une coupe de cône plate, y mener deux lignes, dont les apparences soient les essieux de la figure qui la représente. 》MUD, p.12.

*26 《 Vous m'avez encore envoyé deux discours, l'un contre M. de Beaugrand, et l'autre de M. Desargues. J'avais vu déjà le second, qui est agréable et fait de bon esprit. 》Lettre zde Fermat à Mersenne, mai ou avril 1637. *Œuvres de Fermat*, éd. par P. Tannery et Ch. Henry, 5 vols., Gauthier-Villars, 1891-1922, t.II, p.111.

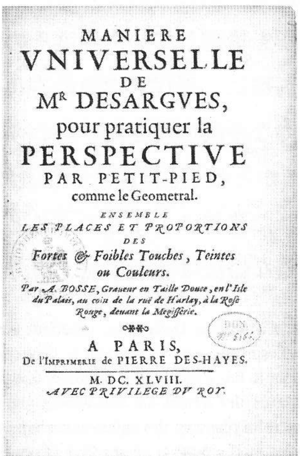
フェルマーが名を挙げるもう一人、ボーグランはメルセンヌのアカデミーの一員、トゥールーズ高等法院でのフェルマーのかつての同僚で、後にアポロニオスの名において、デザルグの『計画草稿』に激しく反発することになる人物である。

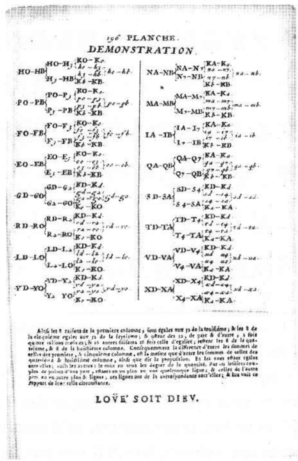
*27 《 Je n'ai reçu que depuis peu de jours les deux petits livres in-folio que vous m'avez envoyés, l'un desquels de perspective n'est pas à désapprouver, et la curiosité et la netteté de son langage est à estimer. 》Lettre de Descartes à Mersenne, 25 mai 1637. *Œuvres de Descartes*, éd. par Ch. Adam et P. Tannery, 11 vols., Vrin, 1996, t.I,

返信を記す。三者間の関係、あるいは二つの新たな幾何学間の関係は、デザルグの「巻き込み定理」、あるいは主著である円錐曲線論、1639年の『計画草稿』を巡る別稿において、詳細な考察の対象とされよう。

8 1648年の『透視図法の普遍的方法』

第二の『透視図法の普遍的方法』、ボスの1648年の著作は八つ折本で本文342頁に図版156枚、合わせて500頁にも及ぶ浩瀚な書籍で、5年後には続刊[*28]が、また1660年代にはオランダ語訳[*29]が出版される程の好評を博した。この翻訳は、鎖国中の日本にもたらされた最初の泰西幾何学書の一冊であるという[*30]。


MANIERE
VNIVERSELLE
DE
M^R DESARGVES,
pour pratiquer la
PERSPECTIVE
PAR PETIT-PIED,
comme le Geometral.
ENSEMBLE
LES PLACES ET PROPORTIONS
DES
Fortes & Foibles Touches, Teintes
ou Couleurs.
Par A. BOSSE, Graueur en Taille Douce, en l'Isle du Palais, au coin de la ruë de Harlay, à la Rose Rouge, deuant la Megisserie.
A PARIS,
De l'Imprimerie de PIERRE DES-HAYES.
M. DC. XLVIII.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.


156 PLANCHE.
DEMONSTRATION.
LOVE' SOIT DIEV.

補遺として、321頁からはデザルグの透視図法論（1636年）の複製、335ページからは「透視図法の基本命題」「光学コンパスの基礎」に続いて「3個の純粋に幾何学的な命題[*31]」が収められ、双三角形定理はそのうち第一命題に相当

p.376-377.

*28 *Moyen universel de pratiquer la perspective sur les tableaux ou surfaces irrégulières*, 1653.

*29 *Algemeene Manier van de Hr. Desargues, tot de practijck der Perspectiven*, Amsterdam, 1664.

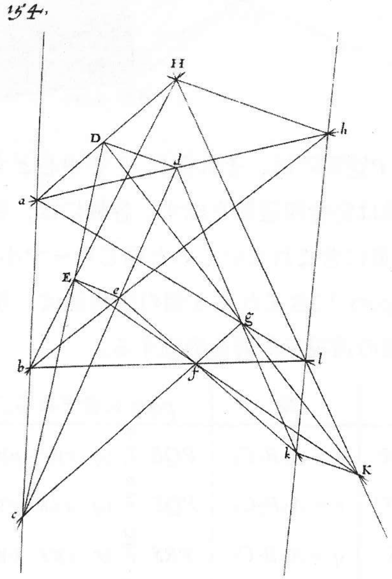
*30 Taton, *Œuvre mathématique de G. Desargues*, PUF, 1951 ; 2e éd., Vrin, 1988, p.57.

*31 《 Suivent trois propositions purement géométriques. 》MUB, p.339.

する。最終頁には全てを締め括るように「神に讃えあれ（Loué soit Dieu）」と大書される。頭文字 L. S. D. は「デザルグ氏（Le Sieur Desargues）」の略号として、L. S. G. D. L.「リヨン人ジラール・デザルグ氏（Le Sieur Girard Desargues Lyonnais）」と共に、デザルグが署名に常用しており、これらの巻末部分は文体や論証方法の特徴から見ても、ボスではなく、デザルグの執筆による可能性が極めて高い。あるいはその推察が誤りでも、巻頭には「デザルグ氏の認証」として

> 私こと下に署名の者は、透視図法の実践に関する本書にボス氏が記載されたことを確かに拝見した。本書においては全て、氏がこの件について私の考えを聞き、構想する労を取られた事柄に合致することを認める[32]。

と掲げられてあり、問題となる記述も、1640 年代後半当時のデザルグの意向を大きく裏切るものではないと考えられる。双三角形定理に関連する図版 154 は以下の通りである。

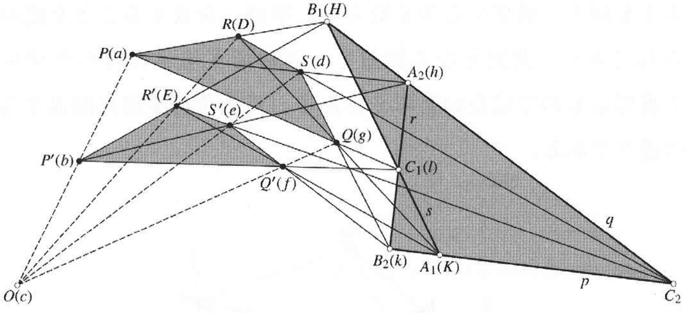


*32 《RECONNAISSANCE DE MONSiEUR DESARGUES. // Je sousigné confesse avoir vu ce que M. Bosse a mis dans ce volume de la pratique de la perspective ; je reconnais que tout y est conforme à ce qu'il a voulu prendre la patience d'en ouïr et concevoir de mes pensées.》Ibid., p.1.

原典の読解からは逸脱するが、完全四角形や完全四辺形、透視三角形、双対原理等、19 世紀以降に整備された、デザルグの時代には存在しなかった諸概念に依拠した場合でも、ここで示される点と直線の配置は極めて興味深い。点 c を O と、2 個の完全四角形 $agDd$, $bfEe$ をそれぞれ $PQRS$, $P'Q'R'S'$ と改名し、与えられた図 版では描かれていない $Dd \cdot Ee = \mathrm{RS} \cdot R'S'$ も補って、

$$A_1 = QR \cdot Q'R',\quad B_1 = RP \cdot R'P',\quad C_1 = PQ \cdot P'Q',$$
$$A_2 = PS \cdot P'S',\quad B_2 = \mathrm{QS} \cdot Q'S',\quad C_2 = RS \cdot R'S'$$

とおく。A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 は、それぞれ元の図の K, H, l, h, k に対応し、C_2 は元の図に描かれていない。



完全四角形 $PQRS$, $P'Q'R'S'$ は、それぞれ O を中心とする 4 組の透視三角形を含み、その 4 本の軸は完全四辺形を成す。各軸には、完全四角形の頂点のうち、対応する透視三角形に含まれないものと同じローマ小文字の名前を与える。このとき完全四辺形 $pqrs$ に含まれる 4 個の三角形は、与えられた透視三角形との間に、新たな 8 組の透視三角形を形成する。

透視三角形	軸	$pqrs$ に含まれる三角形との関係
$PQR \overset{O}{\doublebarwedge} P'Q'R'$	$s = A_1B_1C_1$	$PQR \overset{S}{\doublebarwedge} (q \cdot r)(r \cdot p)(p \cdot q) \overset{S'}{\doublebarwedge} P'Q'R'$
$PQS \overset{O}{\doublebarwedge} P'Q'S'$	$r = A_2B_2C_1$	$PQS \overset{R}{\doublebarwedge} (q \cdot s)(s \cdot p)(p \cdot q) \overset{R'}{\doublebarwedge} P'Q'R'$
$PRS \overset{O}{\doublebarwedge} P'R'S'$	$q = A_2B_1C_2$	$PRS \overset{Q}{\doublebarwedge} (r \cdot s)(s \cdot p)(p \cdot r) \overset{Q'}{\doublebarwedge} P'R'R'$
$QRS \overset{O}{\doublebarwedge} Q'R'S'$	$p = A_1B_2C_2$	$QRS \overset{P}{\doublebarwedge} (r \cdot s)(s \cdot q)(q \cdot r) \overset{P'}{\doublebarwedge} Q'R'R'$

以上は余談であるが、この単純なような、複雑なような、完全四角形・完全四

辺形・透視三角形の織り成す、驚くべき双対性の錯綜は、後世のある種の者（本稿執筆者）において、命題の証明への期待を弥が上にも高めさせるのに十分である。どのような論証を、デザルグはこの図版から導くのか。

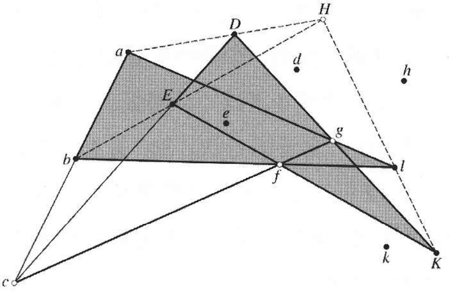
本道に戻り、『透視図法の普遍的方法』340頁を実際に辿ってみる。全体は双三角形定理（1行～12行）と、それに関連する2個の命題（13行～25行、25行～42行）に分けられる。最初は双三角形定理の本体である。これまで通り、括弧内の補足は引用者による。

> 直線 *DHa, HEb, cED, lga, lfb, HlK, DgK, EfK, abc*（原文では *abc* が欠落）が、異なる平面においてでも、同一の平面においてでも、また、どのような順序や方向であれ、同様の点で交わるとき、点 c, f, g は直線 cfg 上にある[*33]。

図形を構成する10個の点 *a, b, c, g, f, l, D, E, K, H* が、10本の直線の上にあることに注目しよう（その意味で、原文における abc の欠落は致命的な印刷上の不注意である)。「どのような順序や方向であれ」という表現からは、この命題が射影・切断による変形を踏まえた射影幾何学に属していることが明白に解される。三角形を強調した本稿の形式に従い、「同様の点において交わる」という表現の曖昧さを精確化すれば、上の陳述は次のように言い換えられる。

デザルグの双三角形定理　三角形 *abl* と *DEK* について、対応する頂点の3本の結線 *aD, bE, lK* が共点（交点 *H*）ならば、対応する辺の3個の交点 $c = ab \cdot DE$, $f = bl \cdot EK$, $g = la \cdot KD$ は共線（結線 cfg）である。

*33 《 Quand les droites *DHa, HEb, cED, lga, l f b, HlK, DgK, EfK*, soit en divers plans, soit en un même plan, s'entrerencontrent par quelconque ordre ou biais que ce puisse être, en de semblables points, les points c, f, g sont en en une droite cfg. 》MUB, p.340.



証明は陳述に応じて、2個の場合に分けられる。最初は三角形 *abl* と *DEK* が異なる平面に属する場合である。

というのも、図形がどのような形から来ていても、いずれにせよ、これらの直線が、*abc, lga, l f b* は ある平面の上に、*DEc, DgK, KfE* は別の平面の上にあれば、点 *c, f* , *g* は共に双方の平面の上にある。従ってそれらの点は直線 c f g の上にある[*34]。

2個の三角形が同じ平面に属する場合については、見慣れない記号が用いられる。

そしてこれらの直線が同じ一つの平面の上にあれば、

$$\begin{array}{ll|l} gD-gK\begin{Bmatrix}aD-aH\\ lH-lK\end{Bmatrix} & aH-aD\begin{Bmatrix}cD-cE\\ bE-bH\end{Bmatrix} & \\ & & cD-cE\begin{Bmatrix}gD-gK\\ fK-fE\end{Bmatrix} \\ fK-fE\begin{Bmatrix}lK-lH\\ bH-bE\end{Bmatrix} & & \end{array}$$

（真中の列 $aH-aD\begin{Bmatrix}cD-cE\\ bE-bH\end{Bmatrix}$ は、原文では $bH-bE\begin{Bmatrix}cD-cE\\ bE-bH\end{Bmatrix}$ と誤記。これも予めの見通しが無ければ、論証をたどる上で致命的な妨げになる）従って、*c* , *f* , *g* は1本の直線の上にある[*35]。

---

*34 《 Car de quelque forme que la figure vienne et en tous les cas ; ces droites étant en divers plans, celles *abc*, *lga*, *l f b* sont en un, celles *DEc*, *DgK*, *KfE*, en un autre ; et ces points *c*, *f* , *g* sont en chacun de ces deux plans ; conséquemment ils sont un une droite *c f g*. 》Ibid.

*35 《 Et les mêmes droites étant en un même plan,

$$\begin{array}{ll|l} gD-gK\begin{Bmatrix}aD-aH\\ lH-lK\end{Bmatrix} & bH-bE\begin{Bmatrix}cD-cE\\ bE-bH\end{Bmatrix} & \\ & & cD-cE\begin{Bmatrix}gD-gK\\ fK-fE\end{Bmatrix} \\ fK-fE\begin{Bmatrix}lK-lH\\ bH-bE\end{Bmatrix} & & \end{array}$$

第一の場合は、本稿での「空間図形の性質による定理の証明」、第2節における証明3の前半に他ならない。三角形 abl の平面（ローマ小文字で表される点を全て含む）を α、三角形 DEK の平面を β と呼ぶことにしよう。α 上の直線と β 上の直線の交点は、必ず α と β の交線（cfg）上になくてはならないというのが、証明の筋である。第二の場合については、335ページに次のような記号の説明が与えられている。

> 証明において、連続する、また行や列に組まれた、$cd - gf\begin{Bmatrix} pq - rn \\ cd - pm \end{Bmatrix}$ という文字記号の配列により何を意味するかと言えば、cd の gf への比は、pq の rn への比と cd の pm への比と同じであることと知られたい[*36]。

これによれば、記号部分は現代風の表記では次のように書き換えられる。

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{gD}{gK} = \dfrac{aD}{aH}\cdot\dfrac{lH}{lK} \quad \dfrac{aH}{aD} = \dfrac{cD}{cE}\cdot\dfrac{bE}{bH} \\[2ex] \dfrac{fK}{fE} = \dfrac{lK}{lH}\cdot\dfrac{bH}{bE} \end{array}\right| \quad \frac{cD}{cE} = \frac{gD}{gK}\cdot\frac{fK}{fE} \tag{1}$$

縦線の左3個の式を辺々掛け合わせれば

$$\frac{gD}{gK}\cdot\frac{aH}{aD}\cdot\frac{fK}{fE} = \left(\frac{aD}{aH}\cdot\frac{lH}{lK}\right)\left(\frac{cD}{cE}\cdot\frac{bE}{bH}\right)\left(\frac{lK}{lH}\cdot\frac{bH}{bE}\right)$$

分子・分母で同じ要素を消去して整理すれば、縦線の右の式が導かれる。ここで第1節での、メネラウスの定理を補題とする証明1を、現在の状況に適用してみよう。

証明1　補題の前半により、三角形 HDE と直線 abc について

$$\frac{\overline{Dc}}{\overline{cE}}\cdot\frac{\overline{Eb}}{\overline{bH}}\cdot\frac{\overline{Ha}}{\overline{aD}} = -1$$

三角形ＨＥＫと直線 lfb について

$$\frac{\overline{Ef}}{\overline{fK}}\cdot\frac{\overline{Kl}}{\overline{lH}}\cdot\frac{\overline{Hb}}{\overline{bE}} = -1$$

三角形 HKD と直線 lga について

$$\frac{\overline{Kg}}{\overline{gD}}\cdot\frac{\overline{Da}}{\overline{aH}}\cdot\frac{\overline{Hl}}{\overline{lK}} = -1$$

Conséquemment, c, f, g sont en une droite. 》Ibid.

*36　《 Et pour donner moyen d'entendre ce que je veux dire aux démonstrations par l'arrangement que j'y fais des lettres de cote en suite et en pile ou colonne, vous saurez par exemple que $cd - gf\begin{Bmatrix} pq - rn \\ cd - pm \end{Bmatrix}$ veut dire que cd est à gf comme pq est à rn et cd à pm, et ainsi du reste semblable. 》Ibid., p.335.

3個の式を辺々掛け合わせれば

$$\frac{\overline{Dc}}{\overline{cE}} \cdot \frac{\overline{Ef}}{\overline{fK}} \cdot \frac{\overline{Kg}}{\overline{gD}} = -1 \tag{2}$$

なので、補題の後半により、c, f, g は共線である。 □

（1）の縦線の右の式は（2）の変形でしかなく、両者の導出の過程も並行しており、デザルグによる証明は、第2節で代数的手法による例として示した、証明1と全く同じである[*37]。

デザルグに帰されるべき文献で二種類の証明（本稿における証明3の前半と証明1）が出揃ったところで、一つの問いが立てられる。図形の性質の中には、透視図法の前後で保存されないもの（線分の長さ、面積、体積、角の大きさ等）と、保存されるもの（共点・共線関係等）がある。前者を**計量的**性質、後者を**射影的**性質と呼ぶことにしよう。メネラウスの定理は線分の長さという計量的性質に基づいており、共線という射影的性質の存在を告げる、極めて有用な命題ではあっても、なぜ共線なのか、その理由までは教えない。その意味で説得力に一段欠ける証明法に、なぜ、デザルグは平面図形の場合を託したのか。空間図形の場合のように、平面図形の場合も射影的性質だけで、双三角形定理を証明できないのか。

「できない」というのが、二世紀半後、非ユークリッド幾何学の発見という衝撃的な事件を受け、幾何学の公理論的再構築を引き受けた、ダーフィット・ヒルベルトの『幾何学基礎論』における答えである。19世紀から20世紀にかけて数学の世界的権威だったヒルベルトの示すところでは、平面における双三角形定理は、平面に留まる限り（デザルグがそうするように）計量的性質によ

*37　ここで改めて『計画草稿』について簡単に先回りしておくと、デザルグの円錐曲線論の基礎、「巻き込み定理」の証明においても、メネラウスの定理が補題として用いられる。任意の完全四角形の3組の相対する辺と、その完全四角形の頂点を通らない直線との交点を、相対する辺上の点には同じローマ文字の名を与えて A, A', B, B', C, C' とおくと、

$$\frac{\overline{A'B} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{AB} \cdot \overline{AB'}} = \frac{\overline{A'C} \cdot \overline{A'C'}}{\overline{AC} \cdot \overline{AC'}}$$

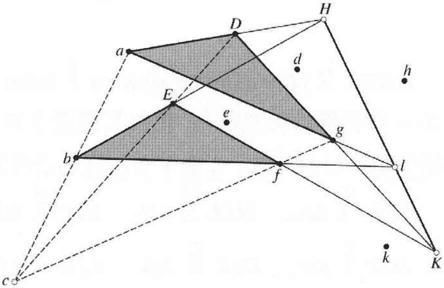
が成り立ち、デザルグはこの美しい関係を「巻き込み」と呼ぶ。「巻き込み」が透視図法において保存されること、すなわち $AA'BB'CC' \,\overline{\wedge}\, \breve{A}\breve{A}'\breve{B}\breve{B}'\breve{C}\breve{C}'$ ならば

$$\frac{\overline{\breve{A}'\breve{B}} \cdot \overline{\breve{A}'\breve{B}'}}{\overline{\breve{A}\breve{B}} \cdot \overline{\breve{A}\breve{B}'}} = \frac{\overline{\breve{A}'\breve{C}} \cdot \overline{\breve{A}'\breve{C}'}}{\overline{\breve{A}\breve{C}} \cdot \overline{\breve{A}\breve{C}'}}$$

が成り立つというのが、別稿の主題とされるべき「巻き込み定理」である。デザルグはこの定理の証明のために、メネラウスの定理を8度まで繰り返して用いている。BP, p.11-12.

るか、そうでなければ（本稿第2節における証明3の後半、または第6節における証明4のように）空間の射影的性質によるかしない限り、証明不可能である。逆に双三角形定理を証明なしに、平面上の射影幾何学の公理として採用すれば、その後の論理展開は空間的な性質の介入なしに、平面上だけで完結する[*38]。このような、$n-1$ 次元（ここでは2次元平面）の射影的 性質の証明に n 次元（3次元空間）の射影的性質が介入するというのは、他に例を見ない、双三角形定理独自の性質とされ、その意味で、双三角形定理は幾何学の根拠付けにおいて、根源的な重要性を担わされることになるだろう[*39]。

1648年の原典に戻る。340頁の残りのうち、最初の部分（13行～25行）では三角形 agD と bfE が中心c、軸 HlK の透視三角形と捉えられた上で、軸における点 H, l, K の共線関係が、双三角形定理の場合と同様、空間と平面の場合に分けて論じられている。



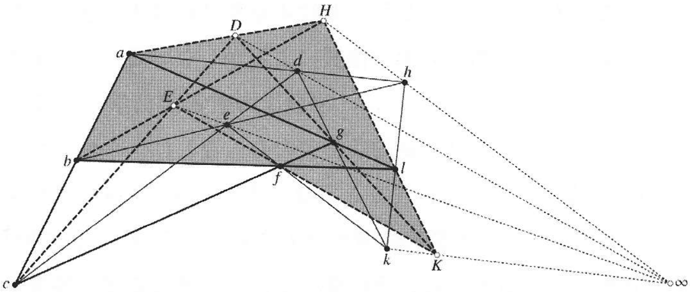
最後の部分（25行～42行）では、図版154の一解釈として本節の最初に述べられた箇所で C_2 とされた、図版には現れない点が、無限遠点として言及される。

> 以上の諸直線が異なる平面の上にあるとして、それらの直線上の点 H, D, E, K を、共にある無限遠の目的へと向かう、すなわち互いに平行な別の直線 Hh, Dd, Ee, Kk が通り、平面のうちの一つ $cbagfl$ と、それぞれ点 h, d, e, k で交わるとする[*40]。

*38　そのような公理系の例として、Coxeter, op. cit., p.24-26.

*39　David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1899 ; 中村幸四郎『幾何学基礎論』、ちくま学芸文庫、2005年、第5章「デザルグの定理」、p.129-156。

*40　《 Et les mêmes droites encore étant en des plans divers, si par leur points *H, D, E, K* passent d'autres



すなわち平面 α 上の点 a, b, c, f, g, l、平面 β 上の点 D, E, K、α, β のどちらにも属さない点 H と、それらの点を3個ずつ含む10本の直線（太線。α 上の直線は実線、それ以外は破線）が与えられたとする。上の図は、H を頂点、α 上の三角形 $a\ b\ l$ または β 上の三角形 DEK を底面とする三角錐に注目すれば、把握しやすいだろう。∞ を α, β のどちらにも属さない無限遠点として、α 上の点 h, d, e, k を透視図法

$$HDEK \overset{\infty}{\doublebarwedge} (H\infty)(D\infty)(E\infty)(K\infty) \overset{\alpha}{\doublebarwedge} hdek$$

により定める（∞ からの射影は細点線）。新たに定義された4個の点を通る α 上の6本の直線（細実線）における、3個ずつの点の共線関係は、

$$HDa \overset{\infty}{\doublebarwedge} hda, \quad HEb \overset{\infty}{\doublebarwedge} heb, \quad HlK \overset{\infty}{\doublebarwedge} hlk,$$

$$DEc \overset{\infty}{\doublebarwedge} dec, \quad DgK \overset{\infty}{\doublebarwedge} dgk, \quad EfK \overset{\infty}{\doublebarwedge} efk$$

として示される。このとき

> これらの直線（上の6個の式の右辺の直線）はどれも同一の平面 $cbagf$ l (α) 上にあり、点 H, D, E, K に発する平行線のために、様々な平面上の図形に含まれる、対応する直線（上の6個の式の左辺の直線）で分割されている[*41]。

ゆえに、

droites *Hh, Dd, Ee, Kk* tendant ensemble à un but à distance interminée, autrement parallèles entre elles ; et qui rencontrent l'un de ces plans *cbag f l*, comme aux points *h, d, e, k* ; 》ibid.

*41 《 Et toutes ces droites-là sont en un même plan *cbag f l*, divisées à cause de ces parallèles venant des points *H, D, E, K*, chacune semblablement à sa correspondante en la figure de divers plans. 》Ibid.

平行線（$H\infty, D\infty, E\infty, K\infty$）がただ一つの平面 *hdabcedg f kl*（上の 6 個の式の右辺中の各点を含む平面 α）上に生じさせた図形は、直線対直線、点対点、比対比で、複数の異なる平面の図形 *abcEHlkg f*（上の 6 個の式の左辺中の各点を含む図形）に対応する。どちらの図形についてもその性質が同様に論じられるので、立体図形を平面図形に代え、元の立体図形は無視しても構わない[*42]。

との結論が与えられる。裏返せば、透視図法により「平面図形を立体図形に代え、元の平面図形は無視しても構わない」のでもあり、このヒルベルトの指摘にも通じる、平面図形と空間図形との可換性を根拠に、本稿では双三角形定理に対し、2 種類の証明（証明 3 の後半と証明 4）を与えたのだった。

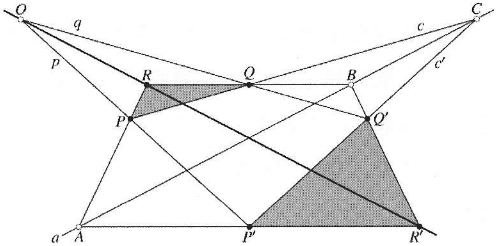
以上で『透視図法の普遍的方法』二編における、双三角形定理に関わる記述を、一通り読み解いたことになる。余談になるが、実はデザルグ以前にも、ヘレニズム期の数学者、アレクサンドリアのパッポス（紀元 4 世紀頃？）が、双三角形定理とよく似た、次の命題を提示していたという。

パッポスの命題　A, B, C を直線 a 上の 3 個の異なる定点とする。O を a 上にない定点として、O を通る 2 本の異なる定直線 p, q を取る。C を通る動直線 c を考え、$P = c \cdot p, Q = c \cdot q$ として $R = AP \cdot BQ$ と定めれば、c が動くとき、R の軌跡は 1 本の直線である[*43]。

動線 c の位置を二箇所で取ると、描かれる図形は確かに、双三角形定理の場合と全く同じである。

*42 《 Ainsi la figure que les parallèles ont fait achever de faire en un seul plan *hdabcedg f kl*, correspond droite à droite, point à point, raison à raison, à cell *abcEHlkg f* de divers plans. Et l'on peut discourir de leurs propriétés sur l'une comme sur l'autre, et par ce moyen, se passer de celle du relief en lui substituant celle d'un seul plan. 》Ibid.

*43 《 Si les côtés d'un triangle variable tournent respectivement autour de points alignés tandis que deux sommets se déplacent sur des lignes droites, le troisième sommet décrit aussi une ligne droite. 》Pappus d'Alexandrie, La *Collection Mathématique*, trad. par P. Ver Ecke, Bruge, 1933, t.II, p.488. Cité par Taton, op. cit., p.204.



上の定理を収めたパッポスの『数学集成』は、他では散逸したギリシャ数学の精華を集める貴重な資料で、フェデリコ・コンマンディーノにより信頼に値するラテン語訳[*44]（1589年）が与えられて以来、近代ヨーロッパ黎明期の学者たちの珍重するところとなった。デザルグがその翻訳を手に取った可能性は十分考えられるにせよ、双三角形定理に関する限り、影響云々は問題になり得ない。パッポスの命題は平面図形の軌跡の問題であり、先ず透視図法を通じて、空間図形の性質として見出されたであろう双三角形定理とは、そもそも発想の源が全く異なるからである。

1648年の『透視図法の普遍的方法』の補遺部分をデザルグに帰すとして、単なる偶然か、彼の公刊された著作は時期的に、もう一つの『透視図法の普遍的方法』、1636年の論文との間に全て挟まれている。19世紀、デザルグの再発掘に力を尽くし、自身も射影幾何学者としての業績で数学史に名を残すミシェル・シャールは、数学者と彼の生きた社会との関係を次のように描く。

> デザルグの天才を、最も傑出した同時代人、デカルト、パスカル、フェルマーはこの上なく重んじた。だが、その見解の斬新さと一般性を理解するに至り得ない凡庸な人々は迫害し、嫌悪した[*45]。

『計画草稿』の円錐曲線論とアポロニオス以来の伝統的円錐曲線論との違いを

*44　*Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones, a Federico Commandino Urbinatae in Latinum conversae, et Commentariis illustratae*, 1589.

*45　《 [...] le génie de Desargues, dont ses plus illustres contemporains, Descartes, Pascal, Fermat, faisaient le plus grand cas ; mais que des hommes médiocres, dont la nouveauté et la généralité de ses vues surpassaient l'intelligence, ont persécuté et dégouté. 》Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Hayez, Bruxelles, p.88.

解し得ない学者たちとの論争に始まり、実践的技芸の分野においても、

> 作品の制作法の良し悪しについて、幾何学を知らない職工の方が、どのように制作するべきか按配できる者より正しく判断できると思ってはならない。透視図法、採石法、日時計制作法の規則で意見を求めるべきなのは、そのような職工ではなく、優れて観想的な人々である。後者は心にとらわれが無く、よくある誤りを免れており、機械的な実地の作業で徒に定規やコンパスを玩んだこともないので、幾ら優秀でも単に実践を積んだだけで幾何学的精神を持たない職工が束になって掛かって来ようと、ただ幾何学的な証明だけで、より優れた見通しを立てられ、作業がどのような結果に至るか、よりよく示せるのである[*46]。

という、相手である職工を挑発するような尊大さへの反発もあって、1640年代のデザルグは「観想的」な能力を発揮するどころか、絶え間ない誹謗中傷[*47]への応酬に忙殺されるという、不毛で苦渋に満ちた日々を余儀なくされることになる。弟子のボスも、1648年に枢機卿リシュリューが創立したばかりの王立絵画彫刻アカデミーで、師デザルグ直伝の透視図法を講ずるという栄誉を得たものの、見える通りではなく、透視図法が教える通りに描くべきとする彼の教条的な姿勢は、次第に周囲の芸術家たちとの軋轢を生み、1661年、ボスは遂に、アカデミーから除名される。デザルグ自身はと言えば1648年、フランス絶対王政確立の最後の産みの苦しみ、フロンドの乱をきっかけに、パリから

---

*46 《 [...] on ne doit pas croire [...] que les ouvriers sans géométrie soient meilleurs juges de la bonne ou mauvaise façons de leurs ouvrages que ceux qui savent ordonner comment il faut faire, [...] ce n'est pas de ces ouvriers-là que ces règles ici de la pratique de la perspective, du trait pour la coupe de pierres et des cadrans plats d'heures égales au soleil, demandent le sentiment, c'est des excellents contemplatifs, lesquels, affranchis de pré-occupations, nonobstant l'erreur commune, sans avoir jamais joué de la règle et du compas en l'éxécution mécanique, par les seules démonstrations géométriques, voient mieux et peuvent mieux assurer à quoi leur exécution aboutira, que ne sairait faire toute l'expérience ensemble de tous les meilleurs ouvriers simplement praticiens, et qui n'ont pas l'esprit de la géométrie. 》 Girard Desargues, *Brouillon Projet d'exemple d'une Manière universelle du S. G. D. L., touchant la pratique du trait à preuves pour la Coupe de Pierres en l'Architecture*, 1640.

*47 匿名文書『デザルグ氏の諸著作に関する慈悲深い意見』(*Avis charitables sur les Diverses Œuvres de Sieur Desargues*, 1642)、ジャック・キュラベル『デザルグ氏の著作の検討』(*Examen des Œuvres de Sieur Girard Desargues*, 1644) 等。これらに対する訴訟沙汰について、1648年の「認証」には相手の「三百代言の逃れ道(《 des échappatoires de la chicane 》, MUB, p.2)」への非難が記されている。こうした群小の誹謗者たちの残した文書に散見する断片的な情報を元に、17世紀後半に作成された『計画草稿』の複写手稿がシャールにより再発見される1845年以前、19世紀の幾何学者たちはデザルグの思想の復元を試みたのだった。

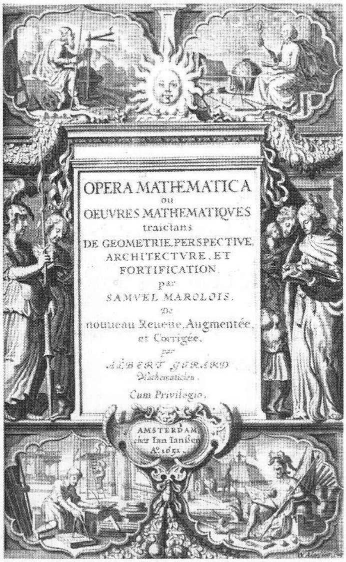
一旦、故郷リヨンに戻った形跡があるが、1640年代後半から1661年の逝去に至るまで、建築家としての幾つかの業績（リヨン市新庁舎設計への関与等）を除き、彼の晩年の足取りを伝える史料は極めて乏しい。デザルグの記憶はこうして、人々の間から失われていった。

9 透視図法と近代の空間

1648年の『透視図法の普遍的方法』の冒頭、第8節で引用した「認証」の直後、60歳に程近いデザルグは一部にアリストテレス・スコラ哲学的語彙も交え（理由は後で考える）、自らの経歴を次のように回想している。

> 正直なところ、自然学や幾何学の研究を私が好んだのも、**実際に現勢態に解消させ得る結果的事象の直近の原因**（強調は引用者）を何らかの形で認識し、健康の保持や何かの技芸の実践への応用で利便を得るのに、それらの学問が役立ち得るからでしかなかった。諸技芸の実践の大部分は確実な基礎として、幾何学により根拠付けられることに、私は気付いた。殊に「幾何学的線描」とも言われる、建築における採石法、幾何学の起源である日時計制作法、また「透かし見る」という語からも明らかだが、絵画における透視図法がそうである。これらの諸技芸の卓越した優雅さに鑑み、私はその基礎と規則を、可能ならば、実際に実践される通りに理解しようと思い立った。そこで気付いたのが次のことである。これら諸技芸の従事者たちは、それぞれの実践について、膨大な教えを記憶に詰め込まなくてはならないが、その教えというのが本性上、彼らの知力に信じ難い混乱を生み出すばかりで、作品の制作を手早くさせるどころか、却って時間を浪費させている。この事実は特に、人間精神の生み出した中でも殊に美しく、尊重されるべき絵画において顕著で、大部分の画家や、その他の職工たちは、言わば偶然任せ、手探りで働いていたのだった。的確な導きは無く、その不確かさや疲労は想像を絶するものがある。その辛く、大抵は報われない労苦を少しでも和らげ、彼らの肩の荷を軽く出来ればという願いから、

私は各技芸について、簡潔な規則を探求し、発表したのだった[*48]。



アルベルティの『絵画論』以後、絵画を手工技芸の地位から、幾何・算術・天文学・音楽と並ぶ自由学芸の域にまで高めたいと願う画家たちにより、ピエロ・デッラ・フランチェスカ『絵画の光学（透視図法）』に始まり、レオナルド・ダ・ヴィンチ『絵画論』、アルブレヒト・デューラー『コンパス・定規による測定法』等、卓越した実作者たちが透視図法の理論的探求を深化させていただけではない[*49]。デザルグの採石法、日時計制作法、透視図法に関する諸著作のように、数学者の側から手工技芸の解明を目指したものも、この時代には数知れない。例えばギリシャ数学の翻訳者として既に言及したコンマンディーノによるプトレマイオス『平面天球図』注解、コンマンディーノの弟子にしてガリレオの友、グィドバルド・デル・モンテによる記念碑的な『透

*48 《 J'avoue franchement que je n'eus jamais de goût à l'étude ou recherche, ni de la physique, ni de la géométrie, sinon en tant qu'elles peuvent servir à l'esprit d'un moyen d'arriver à quelque sorte de connaissance des causes prochaines des effets de choses qui se puissent réduire en acte effectif, au bien et commodité de la vie qui soit en usage pour l'entretien et conservation de la santé, soit en leur application pour la pratique de quelque art. Et m'étant apeçu qu'une bonne partie d'entre les pratiques des arts est fondée en la géométrie ainsi qu'en une base assurée ; entre autres celle de la coupe de pierres en l'architecture, étant pour cela nommée *pratique du trait géométrique* ; celle des cadrans au soleil, comme il appert de la chose et du lieu, dont elle a son origine ; celle de la perspective en l'art de portraiture, ainsi qu'il se voit de la manière dont elle est déduite et du mot *perspective*. Desquels arts ayant considéré l'excellence et la gentillesse, je fus touché du désir d'entendre, s'il m'était possible, les fondements et les règles de leurs pratiques, telles qu'on les trouvait et voyait lors en usage. Où je m'aperçus que ceux qui s'y adonnent avaient à se charger la mémoire d'un grand nombre de leçons diverses pour chacune d'elles, et qui par leur nature et condition, produisaient un embarras incroyable en leur entendement, et loin de leur faire avoir de la diligence à l'exécution de l'ouvrage, leur y faisait perdre du temps ; surtout en celle de la portraiture, si belle et si estimable entre les inventions de l'esprit humain, où la plupart des peintres et autres ouvriers travaillaient comme à l'aventure et en tâtonnant ; sans guide ou conduite assurée, et par conséquent avec une incertitude et fatigue inimaginable. Le désir et l'affection de les soulager, si je pouvais aucunement, de cette peine si laborieuse et souvent ingrate, me fit chercher et publier des règles abrégées de chacun de ces arts. 》MUB, p.1

*49 Piero della Francesca, *De Prospectiva pingendi*, vers 1460-1480 ; Leonardo da Vinci, *Trattato della Pittura*, Langlois, Paris, 1651 ; Albrecht Dürer, *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt*, 1532.

視図法書六巻』、小数表記の導入を始め、実用数学に関する多彩な考案で数学史に名を残すフランドルの数学者、シモン・ステヴィンの『透視図法論』とその仏訳等は、広く普及した、デザルグの手にも届き得たものとして挙げられよう[*50]。左はステヴィンの同国人サミュエル・マロロワによる『幾何学・透視図法・建築・築城術を論じる数学著作集』仏訳（1628年。写真は1651年版）の扉絵であるが、測量術、航海術のための天文学、築城のような軍事技術を含む土木建築等と透視図法との関係を描くその図版は、高度な技芸を修めた職工層の知識社会への参入、あるいは知の世俗化という、中世にはあり得なかった、ルネサンスから近代初頭にかけて顕著な社会現象を、手に取るように物語っているように思われる。

マロロワの数学書の出版された1628年と言えば、フランスではリシュリュー枢機卿がユグノー（プロテスタント）制圧のため、その牙城である大西洋岸の港町、ラ・ロシェルの包囲戦に踏み切り、敵と同盟関係にあるイギリス艦船の入港を阻むべく、港を封鎖する巨大な堤防の建造を企てていた時期である。デカルトの最初の伝記作家アドリアン・バイエによる次の記事は、第4節で挙げたフレスコ画の線描に関するものと並び、技師デザルグの最初期の活動に関する、貴重な証言の一つである。

> 以上が、ラ・ロシェルのこの風景に惹き付けられた他の数知れぬ人々と同様、デカルト氏が見聞きしたがったものである。デカルト氏はその風景で目を楽しませただけではなく、技師たち、特に友人であるデザルグ氏との歓談を楽しんだ。デザルグ氏はその計画全てに関与しており、機械学に関する学識でリシュリュー枢機卿に一目置かれていた[*51]。

---

*50　Federico *Commandion, Commentarius in Planisphaerium Ptolemaei*, 1558 ; Guidobaldo del Monte, *Perspectivae Libri sex*, 1600 ; Simon Stevin, *Derde Stuck der Wisconstighe Ghedachtnissen van de Deuersichtighe*, 1605 ; *Œuvres mathématiques de Simon Stevin*, 1634.

*51　《 Voilà ce que Monsieur Descartes fut curieux de remarquer, comme une infinité d'autres personnes, que ce spectacle avait attirées au siège de La Rochelle. il ne se contenta pas d'en repaître ses yeux ; il se procura encore le plaisir de s'en entretenir avec les ingénieurs et particulièrement avec son ami Monsieur Desargues, qui avait eu quelque part à tous ces dessins, et qui était considéré du cardinal Richelieu pour la grande connaissance qu'il avait de la mécanique. 》Adrien Baillet, *Vie de Monsieur Descartes*, 1691, t.I, p.157.

デカルトには本稿でも既に触れたが、バイエは両者の関係を次のように描く。

　デザルグ氏は、デカルト氏が生涯の交際を自らの務めとした人々の一人である。デザルグ氏はリヨンの生まれで、早くからその才徳で際立っていた。数学、殊に機械学の学識を世の無駄にしないために、デザルグ氏は特に、数々の巧妙な発案で、職工たちの労苦を軽減することに心を砕いていた。デカルト氏もまた、人々の労苦を和らげるため、機械学を完成させる手段に思いを巡らせていただけに、デザルグ氏は一層、デカルト氏の評価と友情を集めることになった。デカルト氏をリシュリュー枢機卿に紹介するため、率先して労を取ったのはデザルグ氏であった。枢機卿との関係から利益を得るなど思いの外だったとは言え、デカルト氏の役に立とうとデザルグ氏の示す熱意に、デカルト氏は感謝せずにはおかなかった[*52]。

事実、デカルトのメルセンヌへの書簡を辿ると、例えば1637年、近代的「主体」宣告の書『方法序説』の出版に先立ち、難航していた允許状の発行のために枢機卿への工作で尽力したデザルグへの恩義を

　貴殿からのお手紙で知ったところでは、デザルグ氏には本当にお世話になっておりますので、氏は私を思いのままに動かせるのだとお伝え下さい[*53]。

と表明したり、1640年代に入っても、哲学上の主著『省察』の準備段階で

　デザルグ氏も、もし宜しければ、私の査読者の一人に加わって下されば、大変うれしいのですが。私は三人の神学者より、氏お一人の方を信頼しま

---

*52 《 Monsieur Desargues fut l'un de ceux qu'il se fit un devoir de converser toute sa vie. il était lyonnais de naissance, se faisait distinguer dès lors par son mérite personnel ; et pour ne rendre pas inutile au public la connaissance qu'il avait des mathématiques et particulièrement de la mécanique, il employait particulièrement ses soins à soulager les travaux des artisans par les subtilités de ses inventions. En quoi il s'attira d'autant plus l' estime et l'amitié de Monsieur Descartes, que de son côté il songeait déjà au moyen de perfectionner la mécanique pour abréger et adoucir les travaux des hommes. Ce fut Monsieur Desargues qui contribua principalement à le faire connaître au cardinal de Richelieu et quoique Monsieur Descartes ne prétendit tirer aucun profit de cette connaissance, il ne se laissa pas de se reconnaître très obligé au zèle que Monsieur Desargues faisait paraître pour le servir. 》Ibid., t.I, p.143

*53 《 car lui (= à Monsieur Desargues) ayant de l'obligation, ainsi que j'apprenais par vos lettres, je serais bien aise de lui témoigner qu'il a sur moi beaucoup de pouvoir 》Lettre de Descartes à Mersenne, 14 joint 1637, AT, t.I, p.391.

す[*54]。

と要請したり、デザルグへの信頼を一貫して曲げないデカルトの姿が浮かび上がってくる。数学の確実性を模範に、「根が形而上学、幹が自然学、その幹から出る枝が医学・機械学・道徳という主要三部門に帰着する、その他の学問」（『哲学原理』[*55]）であるような普遍学を構想し、そのような学を手段に「人間を自然の支配者にして所有者にする」（『方法序説』[*56]）ことを目論む、「考える実体」の哲学者は、有能な技師でもある幾何学者に同志的親愛感を抱いていたのだろう。歴史の皮肉と言うべきか、そのデカルトの存在こそデザルグが忘れられていく最大の原因であること、あるいはこの二人の関係こそ、近代幾何学史の展開の雛形であることが、両者の幾何学（デザルグの総合的射影幾何学とデカルトの解析的計量幾何学）の違いに基づき、別稿で詳細に論じられよう。余談だが、現在でも時折デザルグの生没年が1593年～1562年（実際には1591年～1561年）とされるのは[*57]、

デザルグ氏はデカルト氏よりほぼ3歳年上で、デカルト氏の死後は最早何もせず、その後11年以上を生きた[*58]。

というバイエの記述に基づいている。

さて、透視図法は射影幾何学の記号を用いて

$$\text{視野}\ \overset{\text{視点（射影の中心点）}}{\barwedge}\ \text{視線の束}\ \overset{\text{画面（切断の平面）}}{\barwedge}\ \text{絵画}$$

と要約されるが、これを人間の視覚の再現と考える場合、そこには実は、ある哲学的態度決定が、前提として含まれている。

第一の前提は、われわれがただ一つの動くことのない眼で見ているということ。第二の前提は、視覚のピラミッドの平らな切断面が、われわれの

---

*54 《 Je serais bien aise que Monsieur Desargues soit aussi un de mes juges, s'il lui plaît d'en prendre la peine, et je me fie plus en lui seul qu'en trois théologiens. 》Lettre de Descartes à Mersenne, 24 décembre 1640, AT, t.III, p.268.

*55 《 Ainsi toute la phisolophie est comme un arbre, dont les racines sont la métaphysique, le tronc est la physique, et les branches qui sortent de ce tronc sont toutes les autres sciences,, qui se réduisent à trois principales, la médecine, la mécanique et la morale. 》AT, t.IX-2, p.14.

*56 《 [...] nous rendre comme maîtres et possesseurs de la nature [...] 》, AT, t.VI, p.62.

*57 例えば青木和彦他編『岩波数学入門辞典』岩波書店、2005年。

*58 《 Monsieur Desargues ne fit plus rien après la mort de Monsieur Descartes, auquel il survécut de plus d' onze ans, étant près de trois ans plus a・gé que lui. 》Baillet, op. cit., t.II, p.281.

視像を適切に再現しているとみなされてよいということである[*59]。

二つの前提のうち、前者は射影の中心点に関するもの、後者は切断の平面に関するものである。第一の前提に関しては、人間は一つの動かない眼ではなく、二つの動く眼で見ている。第二の前提に関しては、瞳孔を通じて眼に入った光線の切断面、網膜は平面ではなく、寧ろ球面に近い。また物理的な網膜像が即、意識される視像かどうか、保証するものは何もない。これら（いわば「自然的光学（perspectiva naturalis）」のための）人間の生理的・心理的諸条件を全て捨象して成り立つのが透視図法、「人為的光学（perspectiva artificialis）」である（二つの光学の違いは、正確な透視図法、広角レンズによる写真像で、周辺部の「歪み」として感知されるものを想起すれば明らかである）。そこで与えられるのは当然、知覚の地平に限界付けられ、その内部では各部分がそれぞれ固有な価値を持ち、全体として有機的な統一を保っているような、有限、かつ非均質な、現に人間に生きられる空間ではない。

幾何学の法則に従って構成された数学的・合理的空間、透視図法の空間は、無限、かつ均質である。幾何学空間の諸点を規定するものは、相互の位置関係以外になく、各点が固有の自立的内容を持つことはない。従ってどのような図形も、位置と方向を問わず、どこでも、どちら向きにも、同じように作図される。そこではまた、物体と空虚な間隙（非物体）との差異が、高さ・幅・奥行きから成る三次元空間という、より高次な統一体の単なる変容としてしか捉えられておらず、その意味で透視図法の空間は連続的である。この無限・均質・連続的な空間が、アルベルティの『絵画論』（1435年）からほぼ二世紀後、デカルトの『方法序説』（1637年）では

> 幾何学者の研究対象を、私は次のように解する。それは連続的な物体、あるいは長さ・幅・高さ乃至深さの方向に無限定に延長される空間であり、幾つもの諸部分に分割され、各部分は様々な図形や大きさを持つことができ、どのようにでも移動できる[*60]。

*59　Erwin Panofsky, *Die Perspektive als symbolishce Form*, Vorträge der Bibliothek Warburg 1924-1925 ; エルヴィン・パノフスキー『象徴形式としての遠近法』木田元監訳、ちくま学芸文庫、2009年、p.11。

*60　《 [...] l'objet des géomètres, que je concevais comme un corps continu, ou un espace indéfiniment étendu

として示される。デカルトはそのような事物の存在を、「方法的懐疑」によっても否定され得ない、確実な真理と考える。こうして透視図法の誕生がその論理的帰結として予告していたのは、実は「私は考える、ゆえに私は存在する」と宣言する哲学者により、「考える主体」、すなわち人間の精神に対する計量可能な「延長」として概念化され、「主体」の単なる操作対象、「客体」としてのみ把握されるであろう、そのような近代的な事物の空間の到来なのだった。透視図法の与える像は、その意味で確かに客体的、あるいは「客観的」である他はない。

透視図法は平行線の像を通じて、空間の無限性を可視化する。この芸術家たちの実践を自然哲学における理論的言説に翻訳するとき、無限が眼前の空間として、現に人間に与えられるという主張は、無限がただ神の属性としてのみ思考され、被造界において実在する（「現勢態」として存在する）することなど想定さえされていなかったアリストテレス的キリスト教哲学にとって、自らの存続の根幹に関わる致命的なものとなった。透視図法を「精神的意味内容と内面的に同化した具体的感性的記号」、すなわち「象徴形式[*61]」として解釈するエルヴィン・パノフスキーは、その思想史的経緯を次のように示す。

> 無限な広がりをもち任意に設定された視点を中心に置く空間をともなった真の中心遠近法が漸次形成されていくことによって、盛期スコラ哲学の過渡的立場に対応するジオットやドゥッチオの空間が克服されていった時代は、抽象的思考がアリストテレス的世界観に対するそれまでは偽装されていた断絶を決定的にまた公然と遂行し、絶対的中心である地球の中心のまわりに構築され絶対的限界である最外側の天球によってとりかこまれた宇宙（コスモス）を放棄して、単に神のうちに予造されてあるというだけでなく経験的実在のうちにも現実化されている無限の概念（いわば自然の内部での「現勢的に無限なるもの（energeia apeiron)」の概念）を展開させていった年代なのである。（「可能性において無限に大いなるものは矛盾

en longueur, largeur et hauteur ou profondeur, divisible en diverses parties, qui pouvaient avoir diverses figures et grandeurs, et être mues ou transposées en toutes sortes, [...] 》AT, t.VI, p.36.

*61　パノフスキー、前掲書、p.30。

をふくまない」・「無限に大いなるものは現勢的に現実化される」というこの二つの命題のあいだに、ウィリアム・オッカムとかウォルター・バーレー、アルベルト・フォン・ザクセン、ジャン・ビュリダンといったたぐいの14世紀の論理学者たちは柵を設け、この柵は堅固で乗り越すことのできないものだと信じていた。われわれはまさしくこの柵が崩れ落ちるのを見ようとしているのだ。といっても、それが一挙に倒れたというわけではない。）現勢的な無限性などというものは、アリストテレスにとってはおよそ思い描くこともできなかったし、盛期スコラ哲学にとっても神の全能というかたちでしか、つまりは天上の場（hyperouranios topos）においてしか思い描けないものであったが、それが今や所産的自然（natura naturata）の形式になったのである。つまり、宇宙の見方が脱神学化し、すでにガウリクスが個物に対するその優位をきわめて直感的なかたちで表現していた空間が、いまや「連続量（quantitas continua）」、「三次元からなる自然学（physica triplici dimensione constans）」、「すべての物体に先立ち、またすべての物体がなくとも存立し、万物を無差別に受け容れる自然（natura ante omnia corpora et circa omnia corpora consistens, indifferenter omnia recipiens）」になるのである。[...] この空間観は、のちに、デカルト主義により合理化され、カントの教説によって形式化されるところのあの空間観なのである。[...] 主観的視覚印象が大幅に合理化されることによって、まさしくこの視覚印象こそが、確固たる基礎を持った、そしてまったく近代的な意味で「無限」である経験界を構築するための基盤となりえたのである[*62]。

このように「世界観表象としての空間」が「あらゆる主観的なものの混入から終局的に浄化された」のは、「哲学においてはデカルトによって、そして遠近法理論においてはデザルグによって[*63]」なのだった。

第5節でも引用された、デザルグの『計画草稿』（1639年）の冒頭、

ここで演繹される事柄、またその演繹の仕方から、各人は適当と思わ

*62 同書、p.65-68。中盤の括弧内の部分は、パノフスキーによるデュエムからの引用である。
*63 同書、p.74。

れることを考え、そして次のことを見て取るだろう。すなわち、理性は一方で無限量と、他方でその両端が一つに帰する程小さな量とを知ろうと努めるが、知力は道を失う。それは、それらの量の想像を絶する大きさや小ささのためだけでなく、通常の理性の用法により、それらが一体如何なるものか理解不可能な性質を導くべく、知力が余儀なくされるためでもある[*64]。

という不可知論的な言葉には、宇宙の有限性を初めて否定した（とは言え、無限性を積極的に肯定したわけではない）15 世紀の神学者にして哲学者、アルベルティと同年代でもあるニコラウス・クザーヌスの「学識ある無知（docta ignorantia)」の遠い残響が聞き取れるように思われる[*65]。クザーヌス亡き後、彼の場合と違い、宇宙の有限性という枠内には収められつつも、当時としてはそれこそ驚天動地の思想、地動説がニコラウス・コペルニクスの胸中に温められていたのは、ダ・ヴィンチやデューラーのような傑出した芸術家たちにより、透視画法が実作・理論の両面で深化されつつあったのと丁度同じ時代である。更に一歩踏み込んで宇宙の無限を公然と説いたジョルダーノ・ブルーノが、正に 17 世紀のとば口で、異端として焚刑に処されたのは、逸脱的な思想の勃興に対する宗教的権威の危機感を証拠立てるものでしかない。この世界は最早、中世の人々が信じたような、地球を中心に最外殻の恒星天に取り囲まれた、閉じた有機的構造体、アリストテレスの説く「コスモス」ではなくなっていく。「無

---

*64 《 Chacun pensera ce qui lui semblera convenable, ou de ce qui est ici déduit, ou de la manière de le déduire ; et verra que la raison essaie à connaître des quantités infinies d'une part, ensemble des si petites que leurs deux extrémités opposées sont unies entre elles ; et que l'entendement s'y perd, non seulement à cause de leurs inimaginables grandeur et petitesse, mais encore à cause que le raisonnement ordinaire le conduit à en conclure des propriétés, dont il est incapable de comprendre comment c'est qu'elles sont. 》BP, p.1.

*65 「彼の宇宙は積極的な意味での無限（*infinitum*）ではなく、無限定（*interminatum*）なのである。すなわち単に限界がなく、天球 という外殻に包まれていないというだけのことである。これはまた、その構成要素について限定されていないということ、正確さ、厳 密な限定を完全に欠いているということでもある。」アレクサンドル・コイレ『閉じた世界から無限の宇宙へ』;《 Son Univers n'est pas 《 infini 》(*infinitum*) dans le sens positif de ce terme mais 《 interminé 》(*interminatum*) , ce qui veut dire seulement qu'il n'a pas de limites et n'est pas contenu dans la carapace extérieure des 《 sphères 》célestes, ce qui veut dire aussi qu'il n'est pas 《 terminé 》dans ses constituants, c'est-à-dire qu'il manque complètement de précision et de détermination rigoureuse. 》Alexandre Koyré, Du Monde clos à *l'Univers infini*, trad. par R. Tarr, Gallimard, 1692, p.19-20. 偶然か否か、interminé というフランス語では見慣れない語彙が、第 8 節におけるデザルグから の引用に見出される。脚注 40 を参照。クザーヌスの「反対物の一致（coincidentia oppositorum)」とデザルグとの関係は、『計画草稿』に 即して、別稿にて論じられよう。

限」が眼前に広がる茫漠たる空間、あるいは人間の意のままになるべき無機的な自然として、現に人間に与えられるのである。デザルグの友、デカルトが人間を「世界の支配者にして所有者」(『方法序説』) たらしめんと昂然と言い放つ一方、デザルグの弟子、パスカルが「無限の空間の永遠の沈黙」(『パンセ』[*66]) に人間を震撼せしめる、その時は近い[*67]。

同じ『計画草稿』の補遺[*68]には、ここでもアリストテレス・スコラ哲学的語彙を交え、

> 幾何学においては、諸量について、それらが存在するのが**実際に現勢態としてか、単に潜勢態としてか** (強調は引用者) を区別した上で推論されることはなく、自然の事物一般について、そこに知力の把握できないような何かが存在しないかを決定した上で推論されることもない[*69]。

と記されている。無限大が現勢態として自然界に存在すると認めるのは、1630年代の社会的文脈では、地動説に与することに他ならない。「それでも動く (Eppure si muove.)」という被告ガリレオの言葉が余りにも有名な裁判からヨーロッパ中の学界に衝撃が走る中、デザルグもまた、無限という魅力的な難題に取り組むに当たり、相応の慎重さを自らに課さざるを得なかった。平行な線や面の交わりを要請する彼の幾何学は、数学における非時間的な論理体系としてだけではなく、自然学・形而上学 (超自然学) を含めた知の巨大な布陣変動、西欧近代科学成立史の重要な一契機としても理解されるべきなのである[*70]。

---

*66 《 Le silence éternel de ces espaces infinis m'êraie. 》Blaise Pascal, *Pensées*, éd. par L. Sellier, Bordas, 1991, p.233.

*67 透視図法の歴史と、空間の無限性を巡る思考の歴史とは、(本稿で言及した限りで) その主だった当事者の生没年を並べてみると、年代時にほぼ正確に一致することが判明する。

ブルネッレスキ	1377-1446	デューラー	1471-1528	デザルグ	1591-1661
クザーヌス	1401-1464	コペルニクス	1473-1543	デカルト	1596-1650
アルベルティ	1404-1472	ブルーノ	1548-1600	パスカル	1623-1662
デッラ・フランチェスカ	1415-1492	ガリレオ	1564-1642		
ダ・ヴィンチ	1452-1519	ケプラー	1571-1630		

*68 1639年に刊行された『計画草稿』原典は、本文30頁に、訂正・加筆を含む補遺 (*Avertissement*) 4頁が続く。

*69 《 En géométrie on ne raisonne point des quantités avec cette distinction, qu'elles existent ou bien êctivement en acte, ou bien seulement en puissance, ni du général de la nature avec cette décision, qu'il n'y ait rien en elle que l'entendement ne comprenne. 》BP, 3e page dans l'*Avertissement*.

*70 本稿は17世紀フランス文化に関する数学史・科学史的研究『射影幾何学の起源・デザルグ・

文献一覧

・Alberti, Leon Battista, De Pictura, 1435 ; La Peinture, éd. par Th. Golsenne et B. Prévost, Seuil, 2004.

・anonymes, *Avis charitables sur les DiversesŒuvres de Sieur Desargues*, 1642.

・Baillet, Adrien, *Vie de Monsieur Descartes*, 1691.

・Bosse, Abraham, *La Pratique du Trait à Preuves de Monsieur Desargues pour la Coupe des Pierres en Architecture*, 1643.

・——, *Manière universelle de Monsieur Desargues Lyonnais pour pratiquer la Perpspective par Petit Pied comme le Géométral*, 1648.

・——, *Moyen universel de pratiquer la perspective sur les tableaux ou surfaces irrégulières*, 1653.

・ Brianchon, Charles Julien, 《 Sur les Surfaces courbes du second Degré 》, in *Journal de L'École polytechnique*, cahier 13, 1806.

・ Chasles, Michel, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 1837.

・collectif, D*esaruges en son Temps*, sour la dir. de J. Dhombre et J. Sakarovitch, Blanchard, 1994, contenant :

- Damisch, Hubert, 《 Desargues et la *Métaphysique* de la Perspective 》
- Taton, René, 《 Desargues et le Monde scientifique de son Époque 》

・Commandino, Federico, *Commentarius in Planisphaerium Ptolemaei*, 1558.

・——, *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones*, 1589.

・Coxeter, Harold S. M., *Projective Geometry*, *Springer*, 1974.

・Curabelle, Jacques, *Examen desŒuvres de Sieur Girard Desargues*, 1644.

・Desargues, Girard, 《 Méthode aisée pour apprendre et enseigner à lire et écrire la

パスカルにおける透視図法的円錐曲線論』の第一部として構想されている（第二部「デザルグの巻き込み定理と円錐曲線論」、第三部「射影幾何学者としてのパスカル」）。

上記研究のための習作『早すぎた幾何学者・ジラール・デザルグ略伝』(2013 年、未刊）をご高覧の上、的確かつ有益なご指摘を賜った礒田正美先生、武田裕紀先生、若林功先生、また本研究に限らず、学生としてデカルト・パスカル研究に目を見開かされたことに始まり、これまで数え切れぬ恩恵を蒙ってきた塩川徹也先生に、この場を借りて、心よりお礼申し上げる。

musique 》, in Marin Mersenne, *Harmonie universelle*, 1636.

- ——, *Exemple de l'une des Manières universelles de S. G. D. L., touchant la Pratique de la Perspective sans employer aucun Tiers Point, de Distance ni d'autre Nature, qui soit hors de Champs de l'Ouvrage*, 1636.
- ——, *Brouillon Projet d'une Atteinte aux É vénements des Rencontres d'un Cône avec un Plan*, 1639.
- ——, *Brouillon Projet d'exemple d'une Manière universelle du S. G. D. L., touchant la pratique du trait à preuves pour la Coupe de Pierres en l'Architecture*, 1640.
- Descartes, René,*Œuvres de Descartes*, éd. par Ch. Adam et P. Tannery, 11 vols., Vrin, 1996.
- Dürer, Albrecht, *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt*, 1532.
- Fermat, Pierre de,*Œuvres de Fermat*, éd. par P. Tannery et Ch. Henry, 5 vols., Gauthier-Villars, 1891-1922.
- Guidobaldo del Monte, *Perspectivae Libri sex*, 1600.
- Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie*, 1899 ; 中村幸四郎『幾何学基礎論』、ちくま学芸文庫、2005 年。
- Kepler, Johannes, *Harmonicae Mundi*, 1619.
- Koyré, Alexandre, *From the closed World to the infinite Universe, John Hopkins Press*, 1957 ; *Du Monde clos à l'Univers infini, Gallimard*, 1962.
- Leonardo da Vinci, *Trattato della Pittura*, Paris, 1651.
- Marolois, Samuel,*Œuvres mathématiques, traitant de Géométrie, Perspective, Architecture et Fortification*, 1628.
- Panofsky, Erwin, 《 Perspektive als symbolische Form 》, *Vorträge der Bibliothek Warburg*, 1924-1925 ;『象徴形式としての遠近法』、木田元監訳、ちくま学芸文庫、2009 年。
- Pascal, Blaise, *Œuvres complètes*, éd. par J. Mesnard, Desclée de Brouwer, 4 vol.,

1964-1992.

・——, *Pensées*, éd. par L. Sellier, Bordas, 1991.

・Piero della Francesca, *Prospectiva pingendi*, vers 1460-1480.

・Stevin, Simon, *Derde Stuck der Wisconstighe Ghedachtnissen van de Deuersichtighe*, 1605.

・——, *Œuvres mathématiques de Simon Stevin*, 1634.

・Taton, René, *Œuvre mathématique de G. Desargues*, PUF, 1951 ; 2^e^ éd., Vrin, 1988.

論文要旨

Le Théorème de Desargues sur deux triangles et la Perspective

Kukita Eishi

Mots clefs : Desargues, perspective, géométrie projective, histoire des pensées scientifiques, XVII^{e} siècle

Les recherches géométriques de Girard Desargues (1591-1661) s'inspirent essentiellement des pratiques artisanales de son temps, telles que la perspective, la taille de pierre et la gnomonique, au progrès desquelles il consacra des efforts considérables durant sa vie. Aujourd'hui on a deux théorèmes portant son nom, tous deux à l'origine de la géométrie projective, développée par les mathématiciens du XIXe siècle : l'un sur deux triangles en perspective, l'autre sur l'involution. Cet article se rapporte au premier, publié en 1648 dans un ouvrage d'Abraham Bosse, graveur et disciple du géomètre, qui efforça de diffuser la doctrine de son maître. Après avoir signaler quelques implications mathématiques du théorème, nous avons essayé de montrer, en suivant textuellement le raisonnement du géomètre, comment sa découverte s'enracine dans la *costruzione legittima* de *la perspectiva artificialis*, technique picturale inventée par les artistes florentins du XV^{e} siècle, qui présuppose l'infinité de l'espace en tant qu'application de la géométrie euclidienne. L'existence en acte de l'infini dans la nature, dont la déclaration audacieuse mena Giordano Bruno au bûcher en 1600, fut de nouveau l'enjeu du procès de Galilée sur l'héliocentrisme des années 1630, juste au moment où Desargues méditait sur le renouvellement de la géométrie par l'introduction des éléments à l'infini ; d'où l'importance du théorème dans l'histoire des pensées scientifiques.