

## Invariance de l'*involution*

Transcription moderne du *Brouillon Projet* (1639) de G. Desargues, 2<sup>e</sup> partie

Eishi KUKITA

Mots-clefs: Histoire des Mathématiques, Géométrie projective,  
Girard Desargues, XVII<sup>e</sup> siècle, Culture française

Texte fondateur de la géométrie projective, le *Brouillon Projet d'une Atteinte aux Événements des Rencontres du Cône avec un Plan* (1639) de Girard Desargues (1591-1661)<sup>1</sup> se compose, nous semble-t-il, de trois parties de longueurs presque égales :

1. Propriétés élémentaires de l'*involution*<sup>2</sup> ;
2. Invariance de l'*involution*<sup>3</sup> ;
3. Théorie des coniques selon l'*involution*<sup>4</sup>.

Dans notre article de 2013<sup>5</sup>, nous en avons transcrit la première, où Desargues élabore, en introduisant la notion d'infini dans la géométrie, son outil de travail qu'est l'*involution*. Ci-dessous, nous donnerons la transcription de la deuxième partie, où Desargues établit, au moyen de la perspective, le fondement de sa théorie des coniques, à tel point révolutionnaire que leur classification traditionnelle qui date des *Coniques* d'Apollonius de Perge (3<sup>e</sup> siècle av. J.-C.) : ellipse / parabole / hyperbole, y est superflue. Du point de vue de l'histoire des idées, il ne sera pas inutile de signaler que la perspective, technique picturale inaugurée par les artistes florentins du Quattrocento, en était une à la pointe à l'aube des temps modernes, dans laquelle il était profondément versé en tant

---

1. Avec le sigle *BP*, nous référerons à la version originale de 1639, consultable sur le site *Gallica* de la Bibliothèque nationale de France.

2. *BP*, p.1, l.1 - p.10, l.30.

3. *BP*, p.10, l.31 - p.20, l.32.

4. *BP*, p.20, l.33 - p.30, l. 3.

5. « Présentation structurée du *Brouillon Projet* de G. Desargues (1639) », *Kokusai Ningen Bunka Gakubu Kiyō*, n° XX, 2014, p.83-122.

qu'ingénieur compétent.

Nous nous permettons de commencer par résumer en quelques propositions la partie dont il s'agissait dans notre article précédent.

**Axiome I** Toutes deux droites distinctes en un même plan se rencontrent uniquement en un seul point : soit en un point idéal qui se trouve à l'infini d'une part et d'autre sur chacune d'elles, si elles sont parallèles ; soit en un point ordinaire, si elles ne le sont pas <sup>6</sup> .

**Axiome II** Tous deux plans distincts se rencontrent uniquement en une seule droite : soit en une droite idéale qui se trouve à l'infini de toutes parts sur chacun d'eux, s'ils sont parallèles ; soit en une droite ordinaire, s'ils ne le sont pas <sup>7</sup> .

**Corollaire 1** La droite est le cercle dont le centre soit à l'infini <sup>8</sup> .

**Théorème 1** Soit  $O, A, A', B, B', C$  et  $C'$ , sept points alignés satisfaisant à la condition:

$$\overline{OA} \times \overline{OA'} = \overline{OB} \times \overline{OB'} = \overline{OC} \times \overline{OC'} \neq 0 \text{ } ^9$$

Alors on a l'involution, à savoir :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B} \times \overline{A'B'}}{\overline{AB} \times \overline{AB'}} = \frac{\overline{A'C} \times \overline{A'C'}}{\overline{AC} \times \overline{AC'}}, \quad \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{B'C} \times \overline{B'C'}}{\overline{BC} \times \overline{BC'}} = \frac{\overline{B'A} \times \overline{B'A'}}{\overline{BA} \times \overline{BA'}}$$

et  $\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{C'A} \times \overline{C'A'}}{\overline{CA} \times \overline{CA'}} = \frac{\overline{C'B} \times \overline{C'B'}}{\overline{CB} \times \overline{CB'}} \text{ } ^{10}$ .

Nous noterons cette configuration comme:  $I^o (\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\})$ ; ou plus simplement:  $I(\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\})$ .

Surtout, quand  $B'$  et  $C'$  coïncident respectivement avec  $B$  et  $C$ , nous écrirons:  $I^o (\{A, A'\}_e, \{\{B\}^2, \{C\}^2\}_m)$ ; ou plus simplement:  $I(\{A, A'\}_e, \{\{B\}^2, \{C\}^2\}_m)$ .

**Axiome III** Étant donnée l'involution:  $I^o (\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\})$ , si  $A$  coïncide avec  $O$ , alors  $A'$  est à l'infini <sup>11</sup> .

6. *BP*, p.1, 1.11 - p.1, 1.29.

7. *BP*, p.1, 1.30 - p.1, 1.46.

8. *BP*, p.1, 1.47 - p.2, 1.15.

9. *BP*, p.3, 1.5 - p.3, 1.8.

10. *BP*, p. 4, 1.7 - p. 4, 1.49.

11. *BP*, p. 6, 1.17 - p.6, 1.36.

Nous représenterons par  $\infty_{AB}$  le point à l'infini sur la droite  $AB$ .

**Corollaire 2** Soit  $I^O(\{A, A'\}_e, \{\{B\}^2, \{C\}^2\}_m)$ . Alors on a le rapport harmonique :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}} \quad 12.$$

**Corollaire 3** Soit  $O, O', A, A', B'$  et  $C'$ , six points alignés, tels que :

$$I^O(\{A, A'\}_e, \{\{B'\}^2, \{C'\}^2\}_m) \quad \text{et} \quad \overline{O'A} = -\overline{O'A'}.$$

Alors on a une autre involution :

$$I^O(\{B', C'\}_e, \{\{A\}^2, \{A'\}^2\}_m) \quad 13.$$

**Corollaire 4** Soit  $I^O(\{A, B\}_e, \{\{B'\}^2, \{C'\}^2\}_m)$ . Alors on a deux autres involutions :

$$I^A(\{B', C'\}, \{O, A'\}) \quad \text{et} \quad I^{A'}(\{B', C'\}, \{O, A\}) \quad 14.$$

Toutes ces propriétés, énoncées dans la première partie, décrivent certaines configurations bien définies de points alignés, c'est-à-dire, qui se trouvent sur une même droite. Dans la deuxième partie transcrite ci-dessous, ces configurations seront projetées dans un plan, en telle manière qu'elles révèlent la continuité sans saut de toutes les coniques qui, classifiées le plus souvent en trois espèces comme le fit Apollonius, se trouvent tenues uniformément pour images perspectives du cercle.

Comme dans notre article précédent, le texte sera divisé en sections, dont chacune parlera un titre qui la résume, en même temps que chaque paragraphe sera numéroté, pour dégager la structure logique du texte et faciliter le renvoi interne. Nous avons aussi dessiné les figures qui illustrent le texte, dont nous espérons qu'elles aideront les lecteurs à suivre les raisonnements de Desargues, parfois extrêmement ardu. Dans les notes en bas, nous essayerons : 1° de traduire les idées de Desargues en langage mathématique actuel, pour les rendre accessibles aux lecteurs modernes ; 2° d'éclaircir leurs enchaînements démonstratifs. Quant à la dimension historique, nous nous bornerons ici à mentionner les *Coniques* d'Apollonius, dont Desargues critique explicitement l'insuffisance. Pour montrer de façon satisfaisante l'importance historique de la géométrie de

12. BP, p.7, 1.26 - p.7, 1.55.

13. BP, p.8, 1.39 - p.9, 1.4.

14. BP, p.9, 1.5 - p.9, 1.33.

Desargues, qui est loin de se limiter dans les domaines mathématiques, l'espace que nous offrent les notes marginales est trop restreint.

	Notation
// (et un numéro en marge)	début d'une page indiquée par ce numéro dans la version originale
<b>terme</b>	terme défini
◊ X.Y.Z (num. de paragraphe)	paragraphe ajoué par <i>Avertissement</i>
[texte]	<i>Avis</i> de l'auteur dans <i>Avertissement</i>
◊texte corrigé [← texte original]	correction indiquée par l'auteur dans <i>Avertissement</i>
▽texte corrigé [← texte original]	correction proposée par le transcripteur

## 4 Mise en perspective de l'*involution*

### 4.1 Lemme (théorème de Ménélaüs)

4.1.1 La proposition qui suit au long avec sa démonstration est la même que celle du haut de la page 3, et dont il est dit qu'elle est énoncée autrement en Ptolémée <sup>15</sup>.

[Cette proposition est de la figure 1.]

4.1.2 Quand en une traite  $ACB$  <sup>16</sup> comme tronc, à trois points  $A, B, C$  comme nœuds, passent trois droites comme rameaux déployés  $ARQ, CPQ, BPR$ , le quelconque brin  $CQ$  du quelconque de ces [← ses] rameaux  $CPQ$ , contenu entre son nœud  $C$  et le quelconque des deux autres rameaux  $ARQ$ , est à son accouplé le brin  $CP$ , contenu entre le même nœud  $C$  et l'autre troisième des mêmes rameaux  $BPR$ , en raison même que la composée des raisons d'entre les deux brins de chacune des autres deux rameaux convenablement ordonnés, à savoir de la raison du brin comme  $AQ$  au brin comme  $AR$  et de la raison du brin comme  $BR$  au brin comme  $BP$  <sup>17</sup>.

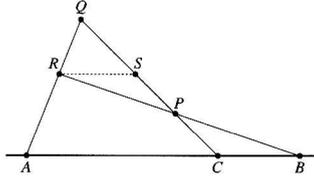
15. Voir le paragraphe 2.5.4.

16. Table des cotes des points (section 4.1):

notre transcription	$A$	$B$	$C$	$P$	$Q$	$R$	$S$
version originale	$H$	$G$	$D$	4	$h$	$K$	$f$

17. **Lemme 1** Soit un triangle  $PQR$ , tel que ses trois côtés  $QR, RP$  et  $PQ$  sont coupés par une droite respectivement en trois points alignés  $A, B$  et  $C$ . Alors  $\frac{CQ}{CP} = \frac{AQ}{AR} \times \frac{BR}{BP}$ .

[En une même figure il y a quelquefois des lettres en cote de même nom et d'espèces diverses, et qui se rapportent de l'impression à la stampe : mais généralement tout les K doivent être de capitales.]



4.1.3 Car, ayant par le point  $R$ , but de l'ordonnance d'entre les deux autres brins  $AQ$ ,  $BP$ , mené une droite  $RS$ , parallèle au tronc  $ACB$ , laquelle donne le point  $S$   $\diamond$ à ce [= au] rameau  $CPQ$ , // puis prenent le brin  $CS$  pour  $\nabla$  moyen [ $\leftarrow$  mitoyen] entre les deux brins  $CQ$  11 et  $CP$ , et considéré le parallélisme d'entre  $RS$  et  $AB$ , le brin  $CQ$  est au brin  $CP$ , en raison même que la composée des raisons du brin  $CQ$  au brin  $CS$ , ou du brin  $AQ$  au brin  $AR$ , et de celle du brin  $CS$  au brin  $CP$ , ou du brin  $BR$  au brin  $BP$  <sup>18</sup>.

4.1.4 Il y a plusieurs choses à remarquer de cette énonciation, quand deux des trois rameaux sont parallèles entre eux ; quand au tronc il y a deux nœuds unis en un ; et ce qui en  $\diamond$ dépend, où l'entendement ne voit goutte [ $\leftarrow$  dépend].

4.1.5 La converse de cette proposition bien énoncée, et concluant que trois points sont en une même droite, est aussi vrai <sup>19</sup>.

## 4.2 Invariance de l'involution

[Cette proposition est de la figure II.]

18. Démonstration du lemme 1. Soit  $S$  un point sur  $PQ$ , tel que  $RS \parallel AB$ . Alors, par ce parallélisme, (1)

$$\frac{CQ}{CS} = \frac{AQ}{AR} \quad \text{et} \quad \frac{CS}{CP} = \frac{BR}{BP} \quad \Rightarrow \quad \frac{CQ}{CP} = \frac{CQ}{CS} \times \frac{CS}{CP} = \frac{AQ}{AR} \times \frac{BR}{BP}.$$

QED.

19. C'est-à-dire, étant donné le triangle  $PQR$ , soit  $A, B$  et  $C$  trois points tels que  $A \in QR, B \in RP, C \in PQ$  et satisfaisant à (1). Alors  $A, B$  et  $C$  sont alignés. Ce qui se démontre de façon suivante. Si  $AB$  et  $PQ$  se rencontrent en  $C'$ , alors, par le lemme 1 et l'hypothèse,

$$\frac{C'Q}{C'P} = \frac{AQ}{AR} \times \frac{BR}{BP} = \frac{CQ}{CP}.$$

Ainsi  $C'$  divise-t-il  $PQ$  de la même manière que  $C$ . Par là, les deux points se coïncident l'un avec l'autre, donc  $C \in AB$ . QED.

4.2.1 Quand à un tronç droite  $B'A'$ ,<sup>20</sup> à trois diverses couples de nœuds  $\{A, A'\}$ ,  $\{B, B'\}$ ,  $\{C, C'\}$ , disposés entre eux en involution, passent trois couplés de rameaux déployés  $\{AV, A'V\}$ ,  $\{BV, B'V\}$ ,  $\{CV, C'V\}$ , tous entre eux d'une même ordonnance au but  $V$ , ces trois couples de rameaux ainsi d'une même ordonnance entre eux sont tous ensemble nommées *ramée* d'un arbre, et chacune d'elles donne en quelconque autre droite  $\overline{B} \overline{A}$ ,<sup>o</sup> menée convenablement [ $\Leftarrow$  menée] en leur plan, une des trois couples de nœuds d'une involution  $\{\overline{A}, \overline{A'}\}$ ,  $\{\overline{B}, \overline{B'}\}$ ,  $\{\overline{C}, \overline{C'}\}$ <sup>21</sup>.

4.2.2 Quand le but  $V$  de l'ordonnance de ces trois couples de rameaux, ou de cette ramée  $\{AV, A'V\}$ ,  $\{BV, B'V\}$ ,  $\{CV, C'V\}$ , est à distance infinie, la chose est évidente du seul parallélisme d'entre ces six rameaux.

4.2.3 Et quand le but  $V$  de l'ordonnance de ces trois couples de rameaux, c'est-à-dire de cette ramée, est à distance finie. Premièrement, les nœuds de chacune de ces trois couples  $\{\overline{A}, \overline{A'}\}$ ,  $\{\overline{B}, \overline{B'}\}$ ,  $\{\overline{C}, \overline{C'}\}$  sont évidemment ou mêlés, ou démêlés, aux nœuds de chacune des autres couples, suivant qu'au tronç  $B'A'$ , les nœuds d'une couple sont mêlés ou démêlés aux nœuds des autres couples.

4.2.4 Davantage, cette autre quelconque droite  $\overline{B} \overline{A}$  est aussi bien que le tronç  ${}^o B'A'$  [ $\Leftarrow BB'$ ], d'une diverse ordonnance avec chacun des rameaux  $\{CV, C'V\}$  d'une quelconque  ${}^v$  de [ $\Leftarrow$  des] ces trois couples de rameaux de cette ramée.

4.2.5 Par le point comme  $C$ , but de l'ordonnance d'entre le tronç  ${}^o B'A'$  [ $\Leftarrow BB'$ ] et

20. Table des cotes des points (sections 4.2- 4.3) :

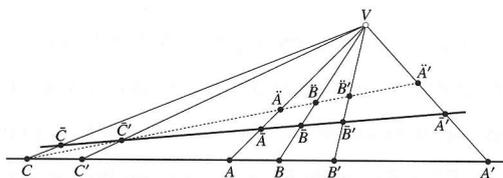
notre transcription	$V$	$A$	$\overline{A}$	$\check{A}$	$\check{A}$	$A'$	$\overline{A'}$	$\check{A'}$	
version originale	$K$	$B$	$b$	2	$L$	$H$	$h$	5	
notre transcription	$B$	$\overline{B}$	$\check{B}$	$B'$	$\overline{B'}$	$\check{B'}$	$C$	$\overline{C}$	$\check{C}$
version originale	$C$	$c$	3	$G$	$g$	4	$D$	$d$	$N$
									$F$
									$f$

21. **Théorème II** Soit une involution:  $I(\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\})$ , et un point  $V$  qui se trouve en dehors de la droite  $AB$ . Si les trois couples de droites  $\{AV, A'V\}$ ,  $\{BV, B'V\}$ ,  $\{CV, C'V\}$  sont coupés par une autre droite que  $AB$ , respectivement en trois couples de points alignés  $\{\overline{A}, \overline{A'}\}$ ,  $\{\overline{B}, \overline{B'}\}$ ,  $\{\overline{C}, \overline{C'}\}$ , alors ces derniers constituent une autre involution:  $I(\{\overline{A}, \overline{A'}\}, \{\overline{B}, \overline{B'}\}, \{\overline{C}, \overline{C'}\})$ .

Avec la notation à la manière de la géométrie projective d'aujourd'hui, ce théorème s'écrit comme:

$$I((A, A'), \{B, B'\}, \{C, C'\}) \text{ et } (AA')(BB')(CC') \overline{\overline{AA'}}(\overline{\overline{BB'}})(\overline{\overline{CC'}}) \\ \Rightarrow I(\{\overline{A}, \overline{A'}\}, \{\overline{B}, \overline{B'}\}, \{\overline{C}, \overline{C'}\}).$$

le quelconque des rameaux  $CV$  de cette quelconque couple  $\{CV, C'V\}$ , et par le point comme  $\bar{C}'$ , but de l'ordonnance d'entre cette quelconque autre droite  $\bar{B} \bar{A}$  et l'autre rameau  $C'V$  de la même quelconque couple  $\{CV, C'V\}$ , soit menée la droite  $\bar{C}\bar{C}'$ , qui donne les points  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{B}', \bar{A}'$ , aux autres quatre rameaux  $AV, BV, B'V, A'V$  de la même ramée <sup>22</sup>.



4.2.6 Maintenant en cette quelconque autre droite  $\bar{B} \bar{A}$ , le rectangle des deux quelconques brins  $\{\bar{C} \bar{B}, \bar{C} \bar{B}'\}$  est à son relatif rectangle des brins  $\{\bar{C}' \bar{B}, \bar{C}' \bar{B}'\}$ , en raison même que la composée des raisons du brin  $\bar{B}' \bar{C}$  au  $\bar{B}' \bar{C}'$  et du brin  $\bar{B} \bar{C}$  au  $\bar{B} \bar{C}'$ .

4.2.7 Et le rectangle des brins  $\{\bar{C} \bar{A}, \bar{C} \bar{A}'\}$ , gémeau du rectangle  $\{\bar{C} \bar{E}, \bar{C} \bar{E}'\}$ , est à son relatif le rectangle des brins  $\{\bar{C}' \bar{A}, \bar{C}' \bar{A}'\}$ , gémeau du rectangle  $\{\bar{C}' \bar{E}, \bar{C}' \bar{E}'\}$ , en raison même que la composée des raisons du brin  $\bar{A} \bar{C}$  au  $\bar{A} \bar{C}'$  et du brin  $\bar{A}' \bar{C}$  au  $\bar{A}' \bar{C}'$ .

4.2.8 Or, la raison du brin  $\bar{E}' \bar{C}$  au  $\bar{E}' \bar{C}'$  est la même que la composée des raisons du brin  $\bar{V}\bar{C}$  au  $VC$  et du brin  $\bar{B}'\bar{C}$  au  $\bar{B}'\bar{C}'$ .

4.2.9 Et la raison du brin  $\bar{B} \bar{C}$  au  $\bar{B} \bar{C}'$  est la même que la composée des raisons du brin  $\bar{V}\bar{C}$  au  $VC$  et du brin  $\bar{B}\bar{C}$  au  $\bar{B}\bar{C}'$ .

4.2.10 C'est-à-dire que la raison du rectangle  $\{\bar{C} \bar{B}, \bar{C} \bar{B}'\}$  au rectangle  $\{\bar{C}' \bar{B}, \bar{C}' \bar{B}'\}$ , qui est la raison composée des raisons du  $\bar{B}' \bar{C}$  au  $\bar{B}' \bar{C}'$  et du  $\bar{B} \bar{C}$  au  $\bar{B} \bar{C}'$ , est la même que la composée de deux fois la raison de  $\bar{V}\bar{C}$  à  $VC$ , et des deux raisons de  $\bar{B}'\bar{C}$  à  $\bar{B}'\bar{C}'$  et de  $\bar{B}\bar{C}$  à  $\bar{B}\bar{C}'$ .

4.2.11 Or la raison de  $\bar{B}'\bar{C}$  à  $\bar{B}'\bar{C}'$  est la même que la composée des raisons de  $B'\bar{C}$  à  $B'\bar{C}'$  et de  $VC'$  à  $V\bar{C}'$ .

4.2.12 Et la raison de  $\bar{B}\bar{C}$  à  $\bar{B}\bar{C}'$  est la même que la composée des raisons de  $BC$  à  $BC'$

22. C'est-à-dire,  $(AA')(BB')(CC') \frac{V}{\bar{A}} (\bar{A}\bar{A}')(\bar{B}\bar{B}')(\bar{C}\bar{C}') \frac{V}{\bar{A}} (\bar{A}\bar{A}')(\bar{B}\bar{B}')(\bar{C}\bar{C}')$ .

et de  $VC'$  à  $V\overline{C'}$ .

4.2.13 C'est-à-dire que la raison composée des deux raisons de  $\overline{B'C}$  à  $\overline{B'C'}$  et de  $\overline{BC}$  à  $\overline{BC'}$  est la même que la composée de deux fois la raison de  $VC'$  à  $V\overline{C'}$ , et des deux raisons de  $B'C$  à  $B'C'$  et de  $BC$  à  $BC'$ , c'est-à-dire la raison du rectangle  $\{CB, CB'\}$  au rectangle  $\{C'B, C'B'\}$ .

4.2.14 C'est-à-dire que la raison du rectangle  $\{\overline{C'B}, \overline{C'B'}\}$  au rectangle  $\{\overline{C'B}, \overline{C'B'}\}$ , à savoir, la raison composée des raisons de  $\overline{B'C}$  à  $\overline{B'C'}$  et de  $\overline{BC}$  à  $\overline{BC'}$ , est la même que la composée de deux fois la raison de  $\overline{VC}$  à  $VC$ , et de deux fois la raison de  $VC'$  à  $V\overline{C'}$ , et des deux raisons de  $B'C$  à  $B'C'$  et de  $BC$  à  $BC'$ , c'est-à-dire, de la raison du rectangle  $\{CB, CB'\}$  à sonrelative rectangle  $\diamond\{C'B, C'B'\} [= \{C'B, C'\}]$ <sup>23</sup>.

4.2.15 Semblablement, la raison du brin  $\overline{A'C}$  au brin  $\overline{A'C'}$  est la même que la composée des raisons de  $\overline{VC}$  à  $VC$  et de  $\overline{AC}$  à  $\overline{A'C'}$ .

4.2.16 Et la raison du brin  $\overline{A'C}$  au brin  $\overline{A'C'}$  est la même que la composée des raisons de  $\overline{VC}$  à  $VC$  et de  $\overline{A'C}$  à  $\overline{A'C'}$ .

4.2.17 C'est-à-dire que la raison du rectangle  $\{\overline{C'A}, \overline{C'A'}\}$  au rectangle  $\{\overline{C'A}, \overline{C'A'}\}$ , à savoir la raison // composée des raisons du  $\overline{A'C}$  au  $\overline{A'C'}$  et du  $\overline{A'C}$  au  $\overline{A'C'}$ , est la même 12 que la composée de deux fois la raison de  $\overline{VC}$  à  $VC$ , et des deux raisons de  $\overline{AC}$  à  $\overline{A'C'}$  et de  $\overline{A'C}$  à  $\overline{A'C'}$ .

4.2.18 Or la raison de  $\overline{AC}$  à  $\overline{A'C'}$  est la même que la composée des raisons de  $AC$  à  $AC'$  et de  $VC'$  à  $V\overline{C'}$ .

4.2.19 Et la raison de  $\overline{A'C}$  à  $\overline{A'C'}$  est la même que la composée des raisons de  $A'C$  à  $A'C'$  et de  $VC'$  à  $V\overline{C'}$ .

23. Démonstration du théorème II (1<sup>ère</sup> partie: paragraphes 4.2.6 et 4.2.8 -4.2.14). Par le théorème de Ménélaüs, appliqué à chaque droite du couple  $\{BV, B'V\}$  et, d'abord au triangle  $C\overline{C}C'$ ,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}} = \frac{VC}{VC'} \times \frac{BC}{BC'} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'C'}} = \frac{VC}{VC'} \times \frac{B'C}{B'C'}$$

ensuite au triangle  $C\overline{C}C'$ ,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}} = \frac{BC}{BC'} \times \frac{VC'}{VC} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'C'}} = \frac{B'C}{B'C'} \times \frac{VC'}{VC}$$

4.2.20 C'est-à-dire que la raison composée des deux raisons de  $\overline{AC}$  à  $\overline{A'\overline{C'}}$  et de  $\overline{A'C}$  à  $\overline{A'\overline{C'}}$  est la même que la composée de deux fois la raison de  $\overline{VC'}$  à  $\overline{V\overline{C'}}$ , et des deux raisons de  $\overline{AC}$  à  $\overline{AC'}$  et de  $\overline{A'C}$  à  $\overline{A'\overline{C'}}$ , c'est-à-dire la raison du rectangle  $\{CA, CA'\}$  au rectangle  $\{C'A, C'A'\}$ .

4.2.21 C'est-à-dire que la raison du rectangle  $\{\overline{C\overline{A}}, \overline{C\overline{A'}}\}$  au rectangle  $\{\overline{C'\overline{A}}, \overline{C'\overline{A'}}\}$ , à savoir, la raison composée des raisons de  $\overline{A\overline{C}}$  à  $\overline{A'\overline{C'}}$  et de  $\overline{A'\overline{C}}$  à  $\overline{A'\overline{C'}}$ , est la même que la composée de deux fois la raison de  $\overline{V\overline{C}}$  à  $\overline{VC}$ , et de deux fois la raison de  $\overline{VC'}$  à  $\overline{V\overline{C'}}$ , et des deux raisons de  $\overline{AC}$  à  $\overline{AC'}$  et de  $\overline{A'C}$  à  $\overline{A'\overline{C'}}$ , c'est-à-dire, de la raison du rectangle  $\{CA, CA'\}$  à son relatif le rectangle  $\{C'A, C'A'\}$  <sup>24</sup>.

4.2.22 Or par l'hypothèse, le rectangle  $\{CA, CA'\}$  est à son relatif le rectangle  $\{C'A, C'A'\}$ , comme le rectangle  $\{CB, CB'\}$ , est à son relatif le rectangle  $\{C'B, C'B'\}$ ; et alternement, et le reste.

4.2.23 C'est-à-dire que le rectangle  $\{\overline{C\overline{B}}, \overline{C\overline{B'}}\}$  est à son relatif le rectangle  $\{\overline{C'\overline{B}}, \overline{C'\overline{B'}}\}$ , et aussi le rectangle  $\{\overline{C\overline{A}}, \overline{C\overline{A'}}\}$  est à son relatif le rectangle  $\{\overline{C'\overline{A}}, \overline{C'\overline{A'}}\}$ , chacun en raison même que la composée de deux fois la raison de  $\overline{V\overline{C}}$  à  $\overline{VC}$ , et de deux fois la rai-

---

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{C\overline{B}} \times \overline{C\overline{B'}}}{\overline{C'\overline{B}} \times \overline{C'\overline{B'}}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'\overline{C'}}} \\
 &= \left(\frac{\overline{V\overline{C}}}{\overline{VC}}\right)^2 \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'\overline{C'}}} \\
 &= \left(\frac{\overline{V\overline{C}}}{\overline{VC}}\right)^2 \times \left(\frac{\overline{VC'}}{\overline{V\overline{C'}}}\right)^2 \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'\overline{C'}}} \\
 &= \left(\frac{\overline{V\overline{C}}}{\overline{VC}}\right)^2 \times \left(\frac{\overline{VC'}}{\overline{V\overline{C'}}}\right)^2 \times \frac{\overline{CB} \times \overline{CB'}}{\overline{C'B} \times \overline{C'\overline{B'}}}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

24. Démonstration du théorème II (2<sup>e</sup> partie: paragraphes 4.2.7 et 4.2.15- 4.2.21). Par le théorème de Ménélaüs, appliqué à chaque droite du couple  $\{AV, A'V\}$  et, d'abord, au triangle  $C\overline{C'}$ ,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{V\overline{C}}}{\overline{VC}} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{C'\overline{C}}}{\overline{C'\overline{C'}}} = \frac{\overline{V\overline{C}}}{\overline{VC}} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$$

ensuite, au triangle  $CC'\overline{C'}$ ,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} \times \frac{\overline{V\overline{C'}}}{\overline{VC'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'\overline{C}}}{\overline{A'\overline{C'}}} = \frac{\overline{A'\overline{C}}}{\overline{A'\overline{C'}}} \times \frac{\overline{V\overline{C'}}}{\overline{VC'}}$$

son de  $VC'$  à  $V\overline{C'}$ , et de la raison du rectangle  $\{CA, CA'\}$  à son relatif le rectangle  $\{C'A, C'A'\}$ , ou de son égal, par l'hypothèse, la raison du rectangle  $\{CB, CB'\}$  à son relatif rectangle  $\{C'B, C'B'\}$ .

4.2.24 Partant le rectangle  $\{\overline{C}\overline{B}, \overline{C}\overline{B'}\}$  est à son relatif rectangle  $\{\overline{C'}\overline{B}, \overline{C'}\overline{B'}\}$ , comme le rectangle  $\{\overline{C}\overline{A}, \overline{C}\overline{A'}\}$ , gémeau du rectangle  $\{\overline{C}\overline{B}, \overline{C}\overline{B'}\}$ , est à son relatif le rectangle  $\{\overline{C'}\overline{A}, \overline{C'}\overline{A'}\}$ , gémeau du rectangle  $\{\overline{C'}\overline{B}, \overline{C'}\overline{B'}\}$ ; et alternativement, changeant, divisant, composant, et le reste.

4.2.25 Ainsi les trois couples  $\{\overline{A}, \overline{A'}\}$ ,  $\{\overline{B}, \overline{B'}\}$ ,  $\{\overline{C}, \overline{C'}\}$  sont en involution <sup>25</sup>.

### 4.3 Involution et parallélisme

4.3.1 Et quand cette quelconque autre droite  $\overline{B}\overline{A}$  est parallèle au quelconque des six rameaux d'une ramée, l'accouplé de ce rameau parallèle donne en cette droite la souche de cette involution pour nœud extrême couplé à la distance infinie <sup>26</sup>.

4.3.2 Quand il n'y a point ici d'avis touchant la diversité des cas d'une proposition,

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{C\overline{A}} \times \overline{C\overline{A'}}}{\overline{C'\overline{A}} \times \overline{C'\overline{A'}}} &= \frac{\overline{A\overline{C}}}{\overline{A'\overline{C'}}} \times \frac{\overline{A'\overline{C}}}{\overline{A\overline{C'}}} \\
 &= \left(\frac{\overline{V\overline{C}}}{\overline{V\overline{C'}}}\right)^2 \times \frac{\overline{A\overline{C}}}{\overline{A'\overline{C'}}} \times \frac{\overline{A'\overline{C}}}{\overline{A\overline{C'}}} \\
 &= \left(\frac{\overline{V\overline{C}}}{\overline{V\overline{C'}}}\right)^2 \times \left(\frac{\overline{V\overline{C'}}}{\overline{V\overline{C}}}\right)^2 \times \frac{\overline{A\overline{C}}}{\overline{A'\overline{C'}}} \times \frac{\overline{A'\overline{C}}}{\overline{A\overline{C'}}} \\
 &= \left(\frac{\overline{V\overline{C}}}{\overline{V\overline{C'}}}\right)^2 \times \left(\frac{\overline{V\overline{C'}}}{\overline{V\overline{C}}}\right)^2 \times \frac{\overline{CA} \times \overline{CA'}}{\overline{C'A} \times \overline{C'A'}}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

25. Démonstration du théorème II (3<sup>e</sup> partie : paragraphes 4.2.22- 4.2.25). Par l'hypothèse, on a

$$\frac{\overline{C\overline{B}} \times \overline{C\overline{B'}}}{\overline{C'\overline{B}} \times \overline{C'\overline{B'}}} = \frac{\overline{C\overline{A}} \times \overline{C\overline{A'}}}{\overline{C'\overline{A}} \times \overline{C'\overline{A'}}},$$

donc, par (1) et (2), on obtient

$$\frac{\overline{C\overline{B}} \times \overline{C\overline{B'}}}{\overline{C'\overline{B}} \times \overline{C'\overline{B'}}} = \frac{\overline{C\overline{A}} \times \overline{C\overline{A'}}}{\overline{C'\overline{A}} \times \overline{C'\overline{A'}}}.$$

QED.

26. **Corollaire 5**

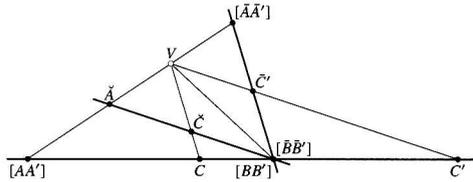
$$I((A, A'), (B, B'), (C, C')), (AA')(BB')(CC') \overset{V}{\wedge} (\overline{A\overline{A'}})(\overline{B\overline{B'}})(\overline{C\overline{C'}})$$

$$\text{et } \overline{A\overline{B}} \parallel CV \Rightarrow I^{C'}((\overline{A}, \overline{A'}), (\overline{B}, \overline{B'}), (\infty_{AB}, \overline{C'}))$$

la démonstration en convient à tous les cas, sinon il en est ici fait mention pour av1s.

[Cette proposition est de la figure III.]

4.3.3 En cette proposition, aux cas de quatre points en involution, quand cette quelconque droite  $\overline{B\bar{A}}$  se trouve parallèle au quelconque de ces rameaux  $CV$ , le nœud comme  $\overline{C'}$  mipartit le brin  $[\overline{B\bar{B}'}][\overline{A\bar{A}'}]$ .



4.3.4 Car, ayant fait que cette quelconque  $\overline{B\bar{A}}$ , ou sa parallèle, qui est même chose, passe au point  $[BB']$ .

4.3.5 D'autnat que les droites  $CV$  et  $[\overline{B\bar{B}'}][\overline{A\bar{A}'}]$  sont parallèles entre elles,  $[\overline{B\bar{B}'}][\overline{A\bar{A}'}]$  est à  $CV$ , comme  $[AA'][BB']$  est à  $[AA']C$ , et  $CV$  est à  $[\overline{B\bar{B}'}]\overline{C'}$  comme  $C'C$  est à  $C'[BB']$ . C'est-à-dire, que la  $[\overline{B\bar{B}'}][\overline{A\bar{A}'}]$  est à  $[\overline{B\bar{B}'}]\overline{C'}$ , en raison même que la composée des raisons de  $[AA'][BB']$  à  $[AA']C$  et de  $C'C$  à  $C'[BB']$ <sup>27</sup>, qui a été démontrée la raison double<sup>28</sup>.

4.3.6 Partant,  $[\overline{B\bar{B}'}][\overline{A\bar{A}'}]$  est double de  $[\overline{B\bar{B}'}]\overline{C'}$ .

4.3.7 La converse en est évidemment aussi vraie, que quand l'un des rameaux  $C'V$  mipartit le brin comme  $\overline{B\bar{A}}$ , cette droite  $\overline{B\bar{A}}$  est parallèle au rameau  $CV$ , couplé du rameau  $C'V$ ; car, puisque les quatre points que ces rameaux y donnent sont en involution,

27. Il s'agit ici de la similitude de deux couples de triangles:

$$\Delta[AA'][\overline{BB'}][\overline{AA'}] \sim \Delta[AA']CV \Rightarrow \frac{[\overline{BB'}][\overline{AA'}]}{CV} = \frac{[AA'][\overline{BB'}]}{[AA']C},$$

et

$$\Delta C'CV \sim \Delta C'[\overline{BB'}]\overline{C'} \Rightarrow \frac{CV}{[\overline{BB'}]\overline{C'}} = \frac{C'C}{C'[\overline{BB'}]}.$$

Donc

$$\frac{[\overline{BB'}][\overline{AA'}]}{[\overline{BB'}]\overline{C'}} = \frac{[\overline{BB'}][\overline{AA'}]}{CV} \times \frac{CV}{[\overline{BB'}]\overline{C'}} = \frac{[AA'][\overline{BB'}]}{[AA']C} \times \frac{C'C}{C'[\overline{BB'}]}.$$

28. Voir le paragraphe 3. 9.13.

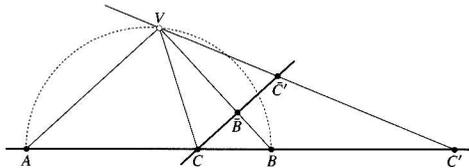
et que le point  $\overline{C'}$  mipartit le brin  $[\overline{B \overline{B'}}][\overline{A \overline{A'}}]$ , le quatrième point  $\overline{C}$ , que donne le rameau  $CV$ , est à distance  $\overset{\circ}{\infty}$ finnie [ $\leftarrow$  finnie] <sup>29</sup>.

4.3.8 Il y a autre démonstration particulière de cette converse; comme, soit menée la droite  $B\check{C}\check{A}$ , parallèle à  $C'V$ , il est démontré que rameau  $VC$  mipartit en  $\check{C}$  cette droite  $B\check{C}\check{A}$  <sup>30</sup>, et par l'hypothèse, le rameau  $C'V$  mipartit en  $\overline{C'}$  la droite  $[\overline{B \overline{B'}}][\overline{A \overline{A'}}]$ , et à cause du parallélisme d'entre les droites  $\{B\check{A}, C'V\}$ , le rameau  $C'V$  mipartit en  $V$  le côté  $\check{A}[\overline{A \overline{A'}}]$  du triangle  $\check{A}[\overline{B \overline{B'}}][\overline{A \overline{A'}}]$ ,  $\overset{\circ}{\infty}$ donc [ $\leftarrow$  dont] le rameau  $CV$  mipartit encore en  $V$  le même côté du même triangle, et partant, ce rameau  $CV$  est parallèle au troisième côté  $[\overline{B \overline{B'}}]$  du même triangle.

**4.4 Rameaux correspondants**

4.4.1 Au cas de quatre seuls points  $A, C, B, C'$  <sup>31</sup> en involution en une droite, où passent quatre rameau déployés  $AV, CV, BV, C'V$  d'une ordonnance entre eux au but  $V$ , les deux rameaux comme  $\{CV, C'V\}$ , ou  $\{AV, BV\}$ , qui passent à deux points correspondants entre eux  $\{C, C'\}$  ou  $\{A, B\}$ , sont ici nommés **rameaux correspondants** entre eux.

4.4.2 Et quand en ce cas, deux rameaux  $\{AV, BV\}$  correspondants sont perpendiculaires entre eux, ils mipartissent chacun un des angles d'entre les autre deux rameaux  $\{CV, C'V\}$ , aussi correspondants entre eux <sup>32</sup>.



29. Ce qui s'ensuit de l'axiome III.

30. De l'hypothèse :  $I(\{C, C'\}_e, \{\{A\}^2, \{B\}^2\}_m)$  et  $ABCC' \overset{\check{A}}{\check{A}} \check{A}\check{B}\check{C}\check{A} \overset{\infty_{AB}}{\infty_{AB}}$ , suit l'involution :  $I^{\check{C}}(\{\check{C}, \infty_{AB}\}_e, \{\{\check{A}\}^2, \{B\}^2\}_m)$ .

31. Table des cotes des points (section 4.4) :

notre transcription	$V$	$A$	$\check{A}$	$B$	$\check{B}$	$C$	$C'$	$\check{C}$	$\check{C}'$
version originale	$K$	$B$	$h$	$G$	$3$	$D$	$F$	$f$	$p$

32. **Corollaire 6**

$I(\{C, C'\}_e, \{A\}^2, \{B\}^2\}_m)$  et  $AV \perp BV \Rightarrow \angle CVB = \angle C'VB$ .

4.4.3 // Car, ayant mené la droite  $\overline{CC'}$ , parallèle au quelconque des rameaux  $AV$ , perpendiculaire à son correspondant  $BV$ , cette droite  $\overline{CC'}$  [ $\leftarrow AC$ ] est aussi perpendiculaire à ce[ $\leftarrow$  au] rameau  $BV$ .

4.4.4 De plus, à cause de ce parallélisme d'entre  $AV$  et  $\overline{CC'}$ , le rameau  $BV$  mipartit  $\overline{CC'}$  [ $\leftarrow CC'$ ] au point  $\overline{B}$ .

4.4.5 Ainsi, les deux triangles  $V\overline{BC}$ ,  $V\overline{B}C'$  ont chacun un angle droit au point  $\overline{B}$ , et les côtés  $\overline{BV}$ ,  $\overline{BC}$  et  $\overline{BV}$ ,  $\overline{B}C'$ , qui comprennent ces angles égaux  $V\overline{BC}$ ,  $V\overline{B}C'$ , égaux entre eux.

4.4.6 Partant, les deux triangles  $V\overline{BC}$ ,  $V\overline{B}C'$  sont égaux et semblables entre eux.

4.4.7 Donc le rameau  $BV$  mipartit un des angles  $CVC'$  d'entre deux autres de ces rameaux correspondants d'entre eux  $\{CV, C'V\}$ , et le rameau  $AV$  mipartit évidemment aussi l'autre des angles d'entre les mêmes rameaux correspondants  $\{CV, C'V\}$ .

4.4.8 Et quand un quelconque de ces rameaux  $BV$  mipartit un des angles  $CVC'$  d'entre deux autres de ces rameaux correspondants entre eux  $\{CV, C'V\}$ , ce quelconque rameau  $BV$  est perpendiculaire à son correspondant le rameau  $AV$ , lequel mipartit aussi l'autre des angles d'entre les même rameaux correspondants  $\{CV, C'V\}$ <sup>33</sup>.

4.4.9 Car, ayant mené la droite comme  $\overline{CC'}$ , perpendiculaire à ce quelconque rameau  $BV$ , les deux angles  $V\overline{BC}$ ,  $V\overline{B}C'$  ont chacun un angle droit au point  $\overline{B}$ , et encore chacun un angle égal au point  $V$ , et de plus un côté commun  $V\overline{B}$ ; partant, ils sont semblables et égaux, et le rameau  $BV$  mipartit  $\overline{CC'}$  au point  $\overline{B}$ .

4.4.10 Conséquemment le rameau  $AV$  est parallèle à la droite  $\overline{CC'}$ , et partant, il est perpendiculaire à son correspondant le rameau  $BV$ .

4.4.11 Quand en un plan, de quatre droites  $AV, CV, BV, C'V$ , d'une même ordonnance entre elles au but  $V$ , deux comme  $\overline{AV}$  [ $\leftarrow CV$ ],  $BV$  sont perpendiculaires entre elles, et mipartissent chacune un des angles que les autre deux  $\{CV, C'V\}$  font entre elles, ces quatre droites-là donnent évidemment en quelconque autre droite  $\overline{ACBC'}$  [ $\leftarrow AC, BC$ ], menée en

33. Il s'agit d'une des réciproques du corollaire 6:

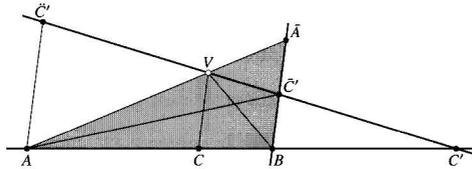
$I(\{C, C'\}_s, \{A\}^2, \{B\}^2)_m$  et  $\angle CVB = \angle C'VB \Rightarrow AV \perp BV$ .

leur point, quatre points  $A, C, B, C'$ , disposés entre eux en involution <sup>34</sup>.

[Quelquefois un seul et même point en représente quatre en involution.]

4.4.12 Quand en un plan, une droite  $C'V$  mipartit en  $\overline{C'}$  un des côtés  $\overline{B\overline{A}}$  d'un triangle  $AB\overline{A}$ , et qu'au point  $V$ , qu'elle donne au quelconque  $\overline{A\overline{A}}$  des autres deux côtés de ce triangle, passe une autre droite  $CV$ , parallèle au côté miparti  $\overline{B\overline{A}}$ , les quatre points comme  $A, C, B, C'$ , que cette construction donne au troisième côté  $AB$  du même triangle, sont entre eux en involution <sup>35</sup>.

4.4.13 Et quand à l'angle  $A$ , soutenu du côté miparti  $\overline{B\overline{A}}$ , passe une autre droite  $\overline{A\overline{C'}}$ , parallèle au côté miparti  $\overline{B\overline{A}}$ , les quatre points  $C', \overline{C'}, V, \overline{C'}$ , que donnent en cette droite  $C'V$ , les trois côtés  $AB, \overline{B\overline{A}}, \overline{A\overline{A}}$  de ce triangle  $AB\overline{A}$ , et la droite menée  $\overline{A\overline{C'}}$ , sont entre eux en involution.



4.4.14 <sup>o</sup>Ce qui, pour la première partie, est [= Ce qui est] évident en menant encore la droite comme  $BV$ ; car, en la droite mipartie,  $B, \overline{C'}, \overline{A}$  et la distance infinie sont en involution, auxquels passent quatre rameaux d'une ordonnance au but  $V$ , et partant, ils donnent en la droite  $AB$  quatre points  $A, C, B, C'$  en involution <sup>36</sup>.

4.4.15 <sup>o</sup>Et pour la seconde partie, [=Et] en menant la droite  $\overline{A\overline{C'}}$ , semblablement en la droite  $\overline{B\overline{A}}$ , les trois points à distance finie  $B, \overline{C'}, \overline{A}$  et la distance infinie sont en involution,

34. Il s'agit d'une autre réciproque du corollaire 6:

$$\angle CVB = \angle C'VB \text{ et } AV \perp BV \Rightarrow I(\{C, C'\}_e, \{\{A\}^2, \{B\}^2\}_m).$$

35. Les paragraphes suivants décrivent deux façons de construire les quatre points constituant une involution avec un triangle donné ( $\Delta B\overline{A}$ ).

36. La 1<sup>ère</sup> construction (les paragraphes 4.4.12, 4.4.14 et 4.4.17) :

$$I(\{\infty_{B\overline{A}}, \overline{C'}\}_e, \{\{\overline{A}\}^2, \{B\}^2\}_m) \text{ et } \overline{A\infty_{B\overline{A}}}B\overline{C'} \overset{V}{\overline{A}} ACBC' \\ \Rightarrow I(\{C, C'\}_e, \{\{A\}^2, \{B\}^2\}_m).$$

auxquels passent quatre rameaux d'une ordonnance au but  $A$ , qui partant donnent en la droite  $C'V$  quatre points  $C', \bar{C}', V, \check{C}'$  en involution <sup>37</sup>.

◊4.4.16 Alors qu'une droite  $C'BA$  coupe en la droite  $\bar{A}\bar{C}'$  une pièce comme  $B\bar{C}'$ , égale à la pièce comme  $\bar{A}\bar{C}'$ , côté d'un triangle comme  $\bar{A}\bar{C}'V$ , cela s'appelle ici que cette droite  $C'BA$  **double** ce côté  $\bar{A}\bar{C}'$  de ce triangle  $\bar{A}\bar{C}'V$ .

4.4.17 Quand en un plan, une droite  $C'BA$  double un des côté  $\bar{A}\bar{C}'$  d'un triangle  $\bar{A}\bar{C}'V$ , et qu'au point  $A$ , qu'elle donne au quelconque  $\bar{A}V$  des autres deux côtés du même triangle, passe une droite  $A\check{C}'$ , parallèle au côté doublé  $\bar{A}\bar{C}'$ , cette construction donne au troisième côté  $V\bar{C}'$  de ce triangle  $\bar{A}\bar{C}'V$ , quatre points  $C', \bar{C}', V, \check{C}'$  en involution, comme il est évident, ayant mené la droite  $A\bar{C}'$ .

4.4.18 Et quand à l'angle  $V$ , soutenu du côté doublé  $\bar{A}\bar{C}'$ , passe une droite  $CV$ , parallèle au côté doublé  $\bar{A}\bar{C}'$ , cette construction donne en la droite doublante  $C'A$  quatre points  $C', B, C, A$  en involuion, comme il est évident, ayant mené la droite  $BV$ .

4.4.19 Cette matière foisonne en semblables moyens pour conclure qu'en une droite, quatre points ou bien trois couples de nœuds sont involution; mais ceci peut suffire à en ouvrir la manière avec ce qui suit.

## 5 Mise en perspective du cercle

### 5.1 Rouleau, colonne et cornet

5.1.1 Quand une droite, ayant un point immobile, se meut par le bord, autrement la circonférence d'un cercle, le point immobile de cette droite est ou bien au plan, ou bien hors du plan de ce cercle.

5.1.2 Quand le point immobile de cette droite est au plan de ce cercle, il y est à distance ou finie, ou infinie.

5.1.3 Et en chacun de ces deux espèces de position de ce point immobile au plan

37. La 2<sup>e</sup> construction (les paragraphes 4.4.13, 4.4.15 et 4.4.18):

$$I(\{\infty_{BA}, \check{C}'\}_e, \{[\bar{A}]^2, [B]^2\}_m) \text{ et } B\bar{C}'\bar{A}\infty_{BA} \frac{A}{\bar{A}} C'\check{C}'V\check{C}' \\ \Rightarrow I(\{\check{C}', \bar{C}'\}_e, \{[V]^2, [C']^2\}_m).$$

de ce cercle, toujours cette droite, en se mouvant, demeure au plan de ce cercle, et aux diverses places qu'elle y prend en se mouvant, elle y donne une ordonnance de droites qui rencontrent le cercle, et dont le but est à distance ou finie, ou infinie.

5.1.4 // Quand le point immobile de cette droite est hors du plan de ce cercle, il y est 14 à distance ou finie, ou infinie ; et en chacune de ces deux espèces de position

de ce point immobile hors du plan du cercle, cette droite, en se mouvant, demeure toujours hors du plan de ce cercle, et en sa révolution, elle environne, enferme

ou décrit un massif, autrement solide, ici nommé *rouleau*, comme d'un nom de sur-genre qui contient deux sous-genre.

5.1.5 Le point immobile de cette droite est nommé *sommet* de ce rouleau.

5.1.6 Le cercle par le bord duquel cette droite se meut, est ici nommé *base* ou *assiette plate* de ce rouleau.

5.1.7 L'espace que cette droite parcourt en se mouvant, est ici nommé *enveloppe*, autrement *surface* de ce rouleau <sup>38</sup>.

---

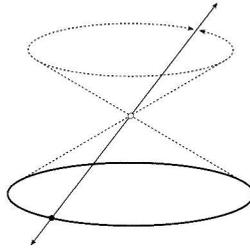
38. **Définition I** Soit un point immobile, une droite infinie mobile et un cercle, tels que le point immobile se trouve hors du plan du cercle, et que la droite mobile tourne, en passant par le point immobile, au long de la circonférence du cercle. Alors la surface décrite par la droite mobile, composée de deux nappes s'opposant l'une à l'autre au point immobile, est appelée cône, dont le point immobile est le *sommet*, et le cercle, la *base*.

En insistant sur la rotation de la droite mobile, Desargues nomme le cône *rouleau*.

La théorie traditionnelle des coniques date d'Apollonius de Perge (vers III<sup>e</sup> siècle av. J.-C.), dont nous verrons comment Desargues s'écarte dans ce qui suit. Voici la première moitié des *définitiones primae* [sic] que donne Apollonius au début du 1<sup>er</sup> livre de ses *Coniques* (nous citons de l'édition que Desargues aurait lue : F. Commandino, *Apollonii Pergae Conicorum Libri quattuor, quae omnia nuper Federicus Commandinus Urbinus Mendis quampluribus expurgata e Graeco convertit, et commentariis illustravit*, Bologne, 1566, p. 6):

1 Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem piano, in quo punctum, conjuncta recta linea in utramque parte producat; et manente puncto convertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, a quo coepit moveri; superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus, ad verticem inter se se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quae eam describit in infinitum producta, voco *conicam superficiem*. 2 *Verticem* ipsius, manens punctum. 3 *Axem*, rectam lineam, quae per punctum et centrum circuli ducitur. 4 *Conum* autem voco, figuram contentam circula et conica superficie, quae inter verticem et circuli circumferentiam interjicitur. 5 *Verticem* conii, punctum, quod et superficie conica vertex est. 6 *Axem*, rectam lineam, quae a vertice ad circuli centrum perducitur. 7 *Basim*, circumulum ipsum. 8 *Conorum rectos* quidem voco, qui axes habent adrectos angulos ipsis basibus. 9 *Scalenos* vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

Ainsi Desargues définit-il son *rouleau*, presque de la même manière qu'Apollonius l'avait fait du cône par la rotation d'une droite infinie ayant un point immobile, à ceci près que le *rouleau* ne contient pas la notion d'*axe* et celles qui en dépendent : pour Desargues, le *centre* d'une conique (*coupe de rouleau* selon lui), par lequel passe l'*axe* du cône, ne sera qu'un point parmi d'autres dans le plan de cette conique. Voir la section 5.3.



5.1.8 Quand le point immobile de cette droite est à distance infinie hors du plan du cercle au bord duquel elle se meut, le rouleau qu'elle décrit est d'une grosseur égale en tous les endroits de sa longueur à quelconque distance finie, et est ici nommé *colonne*, autrement *cylindre*, dont il est évident qu'il y a des espèces.

5.1.9 Quand le point immobile de cette droite est à distance finie hors du plan du cercle au bord duquel elle se meut, le rouleau qu'elle décrit en sa révolution est restreint à son point immobile, auquel il n'a pas de grosseur qu'un seul point, de part et d'autre duquel il va s'élargissant à l'infini par deux cornets opposés entre eux à ce point immobile, et est ici nommé *cornet*, autrement *cône*, dont il est évident qu'il y a des espèces.

5.1.10 Ainsi, la colonne ou cylindre, et le cornet ou cône, sont deux sousgenre d'un sur-genre ici nommé rouleau, dont il est ici traité principalement en général<sup>39</sup> ; et où l'on concevra qu'une seule partie de ce cornet ou cône contenue de l'un des côtés de son sommet, et qui passe ailleurs pour un cône entier, n'est <sup>∇</sup> considérée [← considéré] ni ne passe ici que pour une moitié de cornet ou de cône, et non pas pour un cône entier.

5.1.11 Et partant, à ce mot *cornet* ou *cône*, on concevra les deux parties ensemble et à la fois de cône opposées entre elles à leur sommet, le cône autrement n'étant pas entier.

## 5.2 Coupes de rouleau

5.2.1 Quand un plan autre que celui du cercle, assiette ou base de rouleau, rencontre

---

39. **Corollaire 7** Le cylindre est le cône dont le sommet soit à l'infini.

ce rouleau, pour cela ce plan est nommé ici *plan de coupe* du rouleau <sup>40</sup> .

5.2.2 Un tel plan de coupe rencontre un semblable rouleau, ou bien au sommet, ou bien hors du sommet, et en chacun endroit, c'est en l'une de ces deux façons : ou que la droite qui décrit le rouleau ne se trouve, en se mouvant, jamais parallèle à ce plan de coupe; ou qu'elle s'y trouve quelquefois parallèle <sup>41</sup> .

5.2.3 en façon parallèle Quand un semblable plan de coupe rencontre un rouleau à son sommet, que la droite qui décrit ce rouleau ne se trouve, en se mouvant, jamais à ce plan de coupe.

5.2.4 Si le sommet de ce rouleau se trouve à distance infinie, l'événement en est inimaginable, et l'entendement est incapable de comprendre, comment les événements que le raisonnement lui en fait conclure peuvent être.

5.2.5 Si le sommet de ce rouleau se trouve à distance finie, il est évident que cette droite ne donne qu'un seul point en ce plan de coupe.

5.2.6 Quand un plan de coupe rencontre un rouleau en son sommet, de façon que la droite qui décrit ce rouleau se trouve, en se mouvant, quelquefois parallèle à ce plan de coupe.

5.2.7 Si le sommet de ce rouleau se trouve à distance infinie, la droite qui décrit ce rouleau demeure, en se mouvant, toujours parallèle à ce plan de coupe.

5.2.8 Si le sommet de ce rouleau se trouve à distance finie, la droite qui décrit ce rouleau ne demeure pas, en se mouvant, toujours parallèle à ce plan de coupe.

40. **Définition II** L'intersection du cône avec un plan quelconque est appelée *conique*.

Ingénieur versé dans la perspective, Desargues définit la conique, ou *coupe de rouleau* selon lui, comme image perspective du cercle.

41. Soit  $V$  le sommet,  $\pi$  le plan sécant,  $g$  la droite génératrice du cône. Voici comment Desargues classe les coniques dans les paragraphes qui suivent :

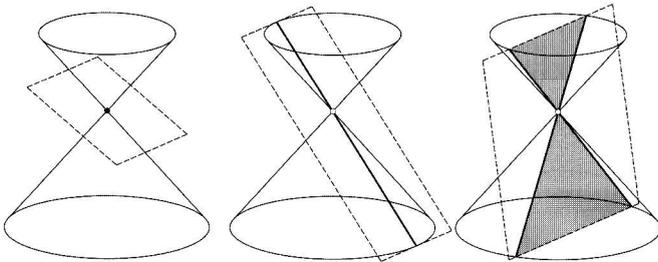
$V \in \pi$	$V$ à l'infini	cas où $g \parallel \pi$	conique engendrée
vrai	faux	0	un point (5.2.5)
vrai	faux	1	une droite (5.2.10)
vrai	faux	2	deux droites concourantes (5.2.11)
vrai	vrai	innombrables	deux droites parallèles (5.2.7)
faux	faux	0	une ellipse (5.2.14, 5.2.23)
faux	faux	1	une parabole (5.2.17, 5.2.24)
faux	faux	2	deux branches d'une hyperbole (5.2.18, 5.2.25)

En outre, Desargues énumère trois cas *inimaginables*, où  $\pi$  rencontre le cône à l'infini (5.2.4, 5.2.13 et 5.2.15).

5.2.9 Et en chacune de ces deux espèces de position du sommet de ce rouleau, la droite qui le décrit se trouve, en se mouvant, ou bien une seule fois, ou bien deux diverses fois, en ce plan de coupe.

5.2.10 Quand elle ne s'y trouve qu'une fois, elle donne une ligne droite en ce plan de coupe qui lors est joint au rouleau de son long, ou comme on dit autrement, touche le rouleau en ce plan de coupe.

5.2.11 Quand elle s'y trouve deux diverses fois, elle donne deux lignes droites en ce plan de coupe, qui fend alors ce rouleau de son long par le sommet.



5.2.12 Quand un semblable plan de coupe rencontre un rouleau ailleurs qu'en son sommet, en façon que la droite qui décrit ce rouleau ne se trouve, en se mouvant, jamais parallèle à ce plan de coupe.

5.2.13 Si cette rencontre est à distance infinie, l'événement est inimaginable, et l'entendement trop faible pour comprendre comment peut être ce que le raisonnement lui en fait conclure.

5.2.14 Si cette rencontre est à distance finie, la droite qui décrit ce rouleau trace en ce plan de coupe, en se mouvant, une ligne courbe, laquelle à distance finie rentre et repasse en soi-même, et dont il y a des espèces<sup>42</sup>.

5.2.15 Quand un semblable plan de coupe rencontre un rouleau ailleurs qu'en son sommet, en façon que la droite qui décrit ce rouleau se trouve quelquefois parallèle à ce plan de coupe, l'événement de cette espèce est du tout inimaginable pour le regard de l'espèce de rouleau nommée cylindre, et encore pour l'espèce nommée cône, quand la

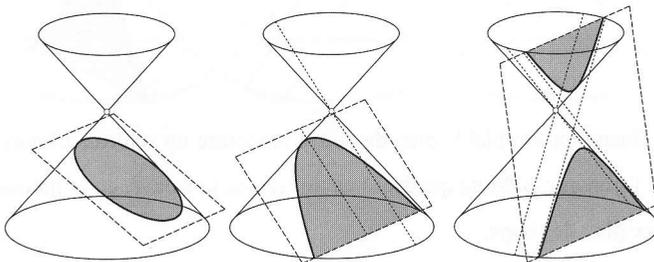
42. L'excentricité de l'ellipse varie entre 0 et 1.

rencontre est à distance infinie.

5.2.16 Et quand un semblable plan de coupe rencontre un cône ailleurs qu'en son sommet, en façon que la droite qui décrit ce cône se trouve quelquefois parallèle à ce plan de coupe, elle s'y trouve ou une seule fois, ou bien deux diverses fois parallèle.

5.2.17 Quand elle s'y trouve une seule fois parallèle <sup>43</sup>, elle y trace une ligne courbe, laquelle à distance infinie rentre et repasse en soi-même, et dont il n'y a qu'une espèce <sup>44</sup>.

5.2.18 Quand elle s'y trouve deux diverse fois parallèle <sup>45</sup>, elle y trace une ligne courbe, laquelle à distance infinie se mipartit en deux égales et semblables moitiés, opposées entre elles dos à dos, desquelles une seule n'est considée et ne passe ici que pour une moitié de l'événement de cette position de plan de coupe au regard du rouleau qu'il rencontre, et dont il y a des espèces <sup>46</sup>.



5.2.19 Voilà comme la rencontre d'un tel plan de coupe et d'un rouleau, sans considérer son assiette, se fait ou bien en un seul point, ou bien en une seule droite, ou bien en deux droites en un même plan, ou bien en une ligne courbe.

5.2.20 Et laissant à part les espèces des rencontres qui se font en un point et en une seule droite, pour discourir seulement des autres espèces, l'espace que ce plan en ces autres espèces de rencontre occupe du massif du rouleau, est ici nommé *coupe du rouleau*.

43. L'axe de la parabole est parallèle à une des génératrices du cône.

44. L'excentricité de la parabole est toujours égale à 1.

45. Chacune des deux asymptotes de l'hyperbole est parallèle à une des génératrices du cône.

46. L'excentricité de l'hyperbole varie entre 1 et  $+\infty$ .

5.2.21 Les lignes droites ou courbes, que la droite qui décrit le rouleau trace en se mouvant au plan de coupe, sont ici nommées **bord** de la coupe du rouleau.

5.2.22 Quand le bord d'une coupe de rouleau se trouve être deux droites, le but de leur ordonnance est à distance ou finie, ou infinie.

5.2.23 Quand le bord d'une coupe de rouleau se trouve être une ligne courbe, laquelle à distance finie rentre et repasse en soi-même, la figure en est nommée ou **cercle**, ou **ovale**, autrement **ellipse**; en français, **défailement**.

5.2.24 Quand le bord d'une coupe de rouleau se trouve être une ligne courbe, laquelle à distance infinie rentre et repasse en soi-même, la figure en est nommée **parabole**; en français, **égulation**.

5.2.25 Quand le bord d'une coupe de rouleau se trouve être une ligne courbe, laquelle à distance infinie se mipartit en deux moitiés opposées dos à dos, la figure en est nommée **hyperbole**; en français, **outrepassement** ou **excèdement**.

5.2.26 Les plus remarquables propriétés des coupes de rouleau sont communes à toutes les espèces, et les noms d'*ellipse*, *parabole* et *hyperbole* ne leur ont été donnés qu'à raison d'événements qui sont hors d'elles et de leur nature <sup>47</sup>.

### 5.3 *Traversale et ordonnées*

5.3.1 Quand en un plan, une droite rencontre une quelconque figure, cette rencontre est considérée seulement à l'égard du bord de cette figure, et la rencontre en un plan

---

47. Par les premiers théorèmes du livre I de ses *Coniques*, Apollonius décrit les coniques en fonction de la position mutuelle entre le plan sécant et le *triangle par l'axe*, à savoir celui qui se définit par l'axe du cône et un diamètre de sa base, en telle sorte que, avec les coordonnées cartésiennes (dans chacune des coniques, son axe comme abscisse et sa tangente à son sommet comme ordonnée), nous pouvons transcrire les résultats de ces théorèmes par les trois équations:

$$y^2 = px - \frac{p}{q}x^2, \quad y^2 = px \quad \text{et} \quad y^2 = px + \frac{p}{q}x^2 \quad (p, q : \text{constantes} > 0).$$

C'est en considérant  $\pm(p/q)x^2$  comme *défait* ou *excès* par rapport à  $px$ , qu'Apollonius appelle chacune des figures représentés par ces équations, respectivement *ellipse* (théorème XI), *parabole* (théorème XII) et *hyperbole* (théorèmes XIII et XIV); ce qui veut dire, selon la traduction latinisante de Desargues, *défailement*, *égulation* et *outrepassement* ou *excèdement*.

Tout cela montre une affinité profonde entre Apollonius et la géométrie analytique à la manière de Descartes ou de Fermat, alors que Desargues critique la conception d'Apollonius selon le *triangle par l'axe*, en affirmant qu'elle dissimule la nature commune à toutes ces courbes, en marquant plutôt leur différence. Voir les paragraphes 5.3.14 et 5.3.15.

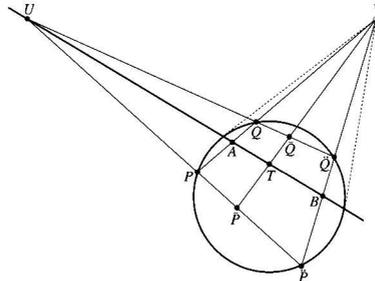
d'une droite d'une droite avec le bord d'une figure se fait en deux points, qui parfait sont unis en un seul ; auquel cas, elle touche cette figure.

[Cette définition est de la figure III.]

5.3.2 Quand en un plan, une figure  $UP, UQ$ <sup>48</sup> est rencontrée de plusieurs droites  $VQP, V\bar{Q}\bar{P}, V\ddot{Q}\ddot{P}$  d'une même ordonnance entre elles, et qu'une même droite  $UATB$  donne en chacune de ces droites d'une même ordonnance entre elles, un point  $A, T, B$ , couplé au but  $V$  de leur ordonnance en involution avec les deux points comme  $\{Q, P\}$ ,  $\{\bar{Q}, \bar{P}\}$ ,  $\{\ddot{Q}, \ddot{P}\}$ , qu'y donne le bord de la figure  $UP, UQ$ , une telle droite  $ATB$  est pour cela nommée ici **traversale** des droites de l'ordonnance au but  $V$ , à l'égard de cette figure  $UP, UQ$ ; et les droites de cette ordonnance au but  $V$  sont pour cela nommées **ordonnées** de la traversale  $UAT$  à l'égard de la même figure  $UP, UQ$ <sup>49</sup>.

°5.3.3 Le point qu'une traversale donne à son ordonnée  $y$  est nommé **traversal**.

°5.3.4 Une quelconque droite du corps des ordonnées d'une traversale, et qui ne rencontre point, ou qui seulement touche la figure, est à l'égard de cette traversale ici nommée **ordinale**, à distinction de ses ordonnées qui traversent la figure.



°5.3.5 Toute droite qui mipartit une figure  $y$  est nommée **diamétrale** de cette figure, et **diamétraversale**, eu encore égard égard à ses ordonnées<sup>50</sup>.

48. Table des cotes des points (section 5.3) :

notre transcription	A	B	P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\dot{P}$	$\dot{Q}$	T	U	V
version originale	G	O	B	C	K	I	Y	X	H	N	F

49. Desargues introduit ici ce que nous appelons aujourd'hui **pôle** (le but des ordonnées) et **polaire** (la traversale de ces ordonnées).

50. Quand le but  $V$  de l'ordonnance des ordonnées  $\{PV, \bar{P}V, \dot{P}V\}$  est à l'infini, toutes ces ordonnées sont parallèles l'une à l'autre, et la traversale  $TU$  bissecte la conique ( $\overline{PA} = \overline{AQ}$ , etc.). Dans ce cas-là, Desargues appelle la droite  $TU$  **diamètre** ou **diamétraversale** de celle-ci, comme l'avait fait Apollonius dans la seconde moitié de ses

5.3.6 Et en chacune de ces ordonnées sont ensemble considérées les deux pièces ou segments comme  $\nabla\{AP, AQ\} [\leftarrow \{BP, BQ\}]$ , qui sont  $\nabla$ contenues [ $\leftarrow$ -contenus] entre la traversale et chacun des rencontres de cette droite avec le bord de la figure. Et les deux pièces ou segments comme  $\{VP, VQ\}$ , qui sont contenues entre le but  $V$  de leur ordonnance et chacun des rencontres de la même droite avec le bord de la figure.

5.3.7 De façon que quand en un plan, les droites  $VP, \overline{VP}, V\overline{P}$  d'une ordonnance au but  $V$ , rencontrent une figure  $UP, UQ$ , il y a quatre espèces de plus grande et de plus petite à considérer aux droites de la même ordonnance au but  $V$ .

5.3.8 La plus grande et la plus petite d'elles qui est contenue entre leur but commun  $V$  et leur rencontre avec le bord de la figure de l'espèce du rencontre  $P$ .

5.3.9 La plus grande et la plus petite d'elles  $\nabla$ contenue [ $\leftarrow$ -contenus] entre leur but commun  $V$  et leur rencontre avec le bord de la figure de l'espèce du rencontre  $Q$ .

5.3.10 Et celle d'elles dont la pièce ou segment comme  $PQ$ , qui est  $\nabla$ contenue [ $\leftarrow$ -contenu] dans la figure, est la plus grande ou la plus petite.

5.3.11 Ou bien celle d'elles dont la somme ou la différence des deux pièces comme  $\{VP, VQ\}$  et comme  $\nabla\{AP, AQ\} [\leftarrow \{BP, 4)BQ\}]$ , contenues entre leur but commun  $V$  et leur traversale  $\nabla AU [\leftarrow BU]$ , et chacun de ses rencontres avec le bord de la figure, c'est la

---

*difinitiones primae* (Commandino, *ibid.*):

10 Omnes curvae lineae in uno piano existentis *diameter* voco rectam lineam, quae quidem ducta a linea curva, omnes lineas, quae in ipsa ducentur, cuidam lineae aequidistantes bifariam dividit. 11 *Verticem* lineae terminum rectae, qui est in ipsa linea. 12 *Ordinatum ad diametrum applicari* dicitur, unaquaeque linearum aequidistantium. 13 Similiter et duarum curvarum linearum in uno piano existentium, *diameter* quidem *transversam* voco, rectam lineam, quae omnes in utraque ipsarum ductas, lineae cuidam aequidistantes bifariam dividit. 14 *Vertices* linearum, diametri terminas, qui sunt in ipsis lineis. 15 Rectam vero *diameter* voco, quae inter duas lines posita, lineas omnes ductas, rectae cuidam aequidistantes, et inter ipsas in-terjectas bifariam secat. 16 *Ordinatum ad diametrum applicari* dicitur unaquaeque linearum aequidistantium. 17 *Conjugatas diametros* voco curvae lineae et duarum curvarum, rectas lineas, quarum utraque diameter est, et lineas alteri aequidistantes bifariam dividit. 18 *Axem* vero curvae lineae, et duarum curvarum, rectam lineam, quae cum sit diameter curvae lineae, vel duarum curvarum, aequidistantes ad rectos secat angulos. 19 *Axes conjugatos* curvae lineae, et duarum curvarum, rectas lineas, quae cum sint diametri conjugatae, ipsis aequidistantes ad rectos angulos secant.

Nous pouvons imaginer facilement comment toutes ces notions aboutiraient à celle de *coordonnées* dans le développement de la géométrie analytique, alors que chez Desargues, le *diamètre*, n'étant qu'un cas parmi d'autres de la *traversale*, n'a aucune raison d'être privilégié; ce par quoi il se distingue d'Apollonius, pour réclamer l'universalité de sa méthode.

plus grande ou la plus petite.

5.3.12 // Partant, à ces mots *traversale*, *ordonnées*, on concevra que les droites dont 16 il est entendu parler sont ainsi nommées à l'égard d'une coupe de rouleau qui est au même plan que ces droites.

◊5.3.13 Quand en un plan, aucun des points d'une droite n'y est à distance finie, cette droite est à distance infinie <sup>51</sup>.

◊5.3.14 D'autant qu'en un plan, le point nommé centre d'une coupe de rouleau n'est qu'un cas d'entre les innombrables buts d'ordonnances de droites, il ne doit être ici jamais parlé de centre de coupe de rouleau.

◊5.3.15 D'autant que toute droite qui passe au sommet d'un rouleau et au quelconque but d'ordonnance de droites au plan de sa base, a une propriété commune avec celle qui passe au but des diamétrales de la base de ce rouleau, jamais il ne doit être ici parlé d'essieu de rouleau <sup>52</sup>.

◊5.3.16 Les droites parallèles entre elles sont chacune d'une et d'autre part cotées d'une même lettre, qui représente le but de leur ordonnance à distance infinie <sup>53</sup>.

5.3.17 Un semblable événement de traversale et d'ordonnées est fréquent aux plates coupes du rouleau quelconque.

5.3.18 Et le bord de la figure avec le but des ordonnées et leur traversale, donnent en chacune des ordonnées toujours quatre points en involution, dont les deux qu'y donne le bord de la figure sont les correspondants entre eux, et celui du but de l'ordonnance avec celui <sup>∇</sup>qu'y [← qui] donne la traversale sont aussi correspondants entre eux <sup>54</sup>.

51. Voir la section 1.3.

52. Desargues pense à la notion clé de la théorie d'Apollonius, le *triangle par l'axe*.

53. Voir par exemple la figure de la section 5.4.

54. Par la définition de la *traversale*, on a  $I(\{P, Q\}, \{V, A\})$ , etc., dans la figure ci-dessus de cette section. D'ici jusqu'à la fin de la section, Desargues décrit les cas de cette *involution* sur chacune des *ordonnées*.

Soit  $O$  le milieu du segment  $PQ$  :

conditions	nature de la traversale à l'égard de la conique
$\overline{OA} = 0$ et $\overline{OV} = \infty$	diamètre (5.3.21, 5.3.29, 5.3.33, 5.3.35)
$0 < \overline{OA} < \overline{OQ} < \overline{OV} < \infty$	sécante à deux points (5.3.27, 5.3.33)
$0 < \overline{OA} = \overline{OQ} = \overline{OV} < \infty$	tangente à un point (5.3.22, 5.3.26, 5.3.32)
$0 < \overline{OV} < \overline{OQ} < \overline{OA} < \infty$	aucune intersection (5.3.30)
$\overline{OV} = 0$ et $\overline{OA} = \infty$	droite à l'infini (5.3.21, 5.3.29, 5.3.30, 5.3.35)

5.3.19 Ou bien en chacune des ordonnées, le but de leur ordonnance est couplé au point qu'y donne leur traversale, en involution avec les deux points qu'y donnent le bord de la figure ; et au rebours.

5.3.20 Ou bien en chacune des ordonnées, les deux points qu'y donne le bord de la figure sont couplés en involution avec ces deux autres points, le but de leur ordonnance et celui qu'y donne la traversale.

5.3.21 Or comme en une involution de quatre points, quelquefois les deux de la couple des extrêmes sont éloignés l'un de l'autre, en façon que l'un est uni à la souche, et l'autre est à distance infinie.

5.3.22 Par contre, aussi les mêmes deux nœuds ou points de la couple d'extrêmes sont quelquefois approchés jusques à être unis ensemble à un même des autres deux nœuds ou points moyens et correspondants entre eux, auxquels cas les quatre points de l'involution se trouvent réduits à deux seuls points, à un desquels on en concevra trois unis en un.

5.3.23 Il y a beaucoup à dire au sujet des quatre points en involution d'une ordonnance de droites avec la traversale et le bord de leur figure, mais en ce *Brouillon* il suffira de dire quelque chose des espèces d'événements plus généraux, qui peuvent en faire voir aisément le particulier.

5.3.24 Au plan d'une coupe de rouleau quelconque, le but d'une ordonnance de droites, autrement d'un corps d'ordonnées, est ou bien au bord, ou bien hors du bord de la figure, et en chacune de ces deux positions, il est ou bien à distance finie, ou bien à distance infinie.

5.3.25 Au plan d'une coupe de rouleau quelconque, la traversale d'une ordonnance de droites, autrement d'un corps d'ordonnées, ou bien rencontre, ou bien ne rencontre pas le bord de la figure, et en chacune de ces deux positions, elle est ou bien à distance finie, ou bien à distance infinie.

5.3.26 Quand le but d'un corps d'ordonnées est au bord de la figure à distance finie ou infinie, la traversale de l'ordonnance est du corps même des ordonnées, et passe au but

de l'ordonnance, auquel elle touche la figure.

5.3.27 Quand le but des ordonnées est hors du bord de la figure à distance ou fini ou infinie, et que toutes les ordonnées rencontrent le bord de la figure, la traversale ne le rencontre pas ; et si toutes les ordonnées ne rencontre pas le bord de la figure, la traversale le rencontre.

5.3.28 Davantage, les deux pièces de chacune des ordonnées, contenues entre leur but et chacun des deux points qu'y donne le bord de la figure, sont ou bien égales, ou bien inégales entre elles.

5.3.29 Quand elles sont égales entre elles, aussi les deux pièces de chacune des mêmes ordonnées, contenues entre leur traversale et chacun des deux points qu'y donne le bord de la figure, sont égales entre elles; et au contraire.

5.3.30 Et par contre, quand la traversale d'un corps d'ordonnées à distance ou finie, ou infinie, ne rencontre pas le bord de la figure, toutes les ordonnées le rencontrent.

5.3.31 Quand la traversale d'un corps d'ordonnées à distance ou finie, ou infinie, rencontre le bord de la figure, elle le rencontre ou bien en un, ou bien en deux points.

5.3.32 Quand elle le rencontre en un point, ce même point est le but <sup>o</sup>de ses [ $\Leftarrow$  des] ordonnées.

5.3.33 Quand elle le rencontre en deux points, toutes <sup>o</sup>ses [ $\Leftarrow$  les] ordonnées ne le rencontrent pas.

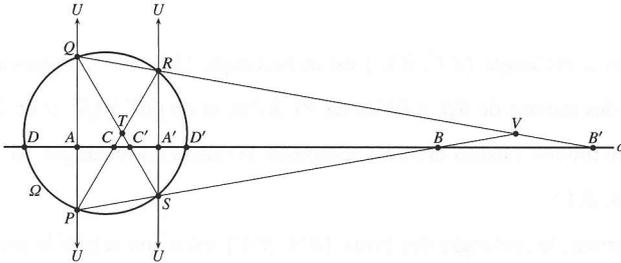
5.3.34 Davantage, les deux pièces de chacune des ordonnées, contenues entre leur traversale et chacune de leurs deux rencontres avec le bord de la figure, sont ou bien égales, ou bien inégales entre elles.

5.3.35 Quand elle sont égales entre elles, aussi les deux pièces de chacune des mêmes ordonnées, contenues entre <sup>o</sup>le but de leur ordonnance [ $\Leftarrow$  leur traversale] et chacun des deux points qu'y donne le bord de la figure, sont égales entre elles; et au contraire.

#### 5.4 Cercle et *involution*

[Cette proposition est de la figure V.]

5.4.1 Quand en un plan, quatre points  $P, Q, R, S$ <sup>55</sup> comme bornes couplés trois fois entre elles, passent trois couples de droites bornales  $\{PQU, RSU\}, \{PSV, QRV\}, \{PRT, QST\}$ , chacune de ces trois couples de droites bornales, et le bord courbe d'une quelconque coupe de rouleau qui passe à ces quatre points  $P, Q, R, S$ , donne en quelque autre droite de leur plan ainsi qu'en tronc  $ACA'$ , une des couples de nœuds d'une involution  $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}$  et  $\{D, D'\}$ ; et si les deux bornales droites d'une couple  $\{PQU, RSU\}$  sont // parallèles entre elles, les rectangles de leurs couples relatives de brins déployés au tronc sont entre eux comme leurs gémeaux les rectangles des brins pliés au tronc et de même ordre sont entre eux<sup>56</sup>.



5.4.2 Car le rectangle de la couple quelconque de brins pliés au tronc  $\{B' A, B' A'\}$  est à son relatif rectangle  $\{BA, BA'\}$ , en raison même que la composée des raisons de  $AB'$  à  $AB$  et de  $A'B'$  à  $A'B$ .

5.4.3 Or  $AB'$  est à  $AB$ , en raison même que la composée des raisons de  $QB'$  à  $QV$  et de  $PV$  à  $PB$ .

55. Table des cotes des points :

notre transcription	A	A'	B	B'	C	C'	D	D'
version originale	I	K	P	Q	G	H	L	M

notre transcription	P	Q	R	S	T	U	V
version originale	B	C	D	E	R	N	F

56. **Théorème III** Soit  $\Omega$  une conique,  $PQRS$  un quadrangle complet inscrit à  $\Omega$  et  $o$  une droite, tels que  $o$  coupe trois couples de côtés opposés du quadrangle  $\{PQ, RS\}, \{PS, QR\}, \{PR, QS\}$ , respectivement en trois couples de points  $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}$ , et  $\Omega$  en un couple  $\{D, D'\}$ . Alors trois quelconques des quatre couples  $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}$  et  $\{D, D'\}$ , constituent une involution.

L'énoncé de Desargues contient une condition de plus, le parallélisme :  $PQ \parallel RS$ , qui n'est pas essentielle dans le développement de la géométrie projective. Voir les paragraphes 5.4.13- 5.4.16.

5.4.4 Et  $A'B'$  est à  $A'B$ , en raison même que la composée des raisons de  $RB'$  à  $RV$  et de  $SV$  à  $SB$ .

5.4.5 Donc le rectangle  $\{B'A, B'A'\}$  est au rectangle  $\{BA, BA'\}$ , en raison même que la composée des raisons de  $QB'$  à  $QV$  et de  $PV$  à  $PB$ , et de  $RB'$  à  $RV$  et de  $SV$  à  $SB$ .

5.4.6 Semblablement, le rectangle  $\{B'C, B'C'\}$  est au rectangle  $\{BC, BC'\}$ , en raison même que la composée des raisons de  $CB'$  à  $CB$  et de  $C'B'$  à  $C'B$ .

5.4.7 Or  $CB'$  est à  $CB$ , en raison même que la composée des raisons de  $RB'$  à  $RV$  et de  $PV$  à  $PB$ .

5.4.8 Et  $C'B'$  est à  $C'B$ , en raison même que la composée des raisons de  $QB'$  à  $QV$  et de  $SV$  à  $SB$ .

5.4.9 Donc le rectangle  $\{B'C, B'C'\}$  est au rectangle  $\{BC, BC'\}$ , en raison même que la composée des raisons de  $RB'$  à  $RV$  et de  $PV$  à  $PB$ , et de  $QB'$  à  $QV$  et de  $SV$  à  $SB$ , qui sont les quatre mêmes raisons dont est composée la raison du rectangle  $\{B'A, B'A'\}$  au rectangle  $\{BA, BA'\}$ .

5.4.10 Partant, le rectangle des brins  $\{B'A, B'A'\}$  est à son relatif le rectangle  $\{BA, BA'\}$ , comme le rectangle  $\{B'C, B'C'\}$ , gémeau du rectangle  $\{B'A, B'A'\}$ , est à son relatif le rectangle"  $\{BC, BC'\}$  [ $\leftarrow \{BA, BC\}$ ], gémeau du rectangle  $\{BA, BA'\}$ .

5.4.11 Et partant, les trois couples de nœuds  $\{A, A'\}$ ,  $\{B, B'\}$ ,  $\{C, C'\}$  sont en involution entre elles<sup>57</sup>.

57. Démonstration du théorème III (1<sup>ère</sup> partie : paragraphes 5.4.2 - 5.4.11). On commence par prouver, avec les trois couples des intersections de  $PQRS$  et de  $o$ , l'involution :  $I(\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\})$ .

Par le théorème de Ménélaüs, appliqué au triangle  $VBB'$  et, d'abord à chaque droite du couple  $\{PQ, RS\}$ ,

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QB'}}{\overline{QV}} \times \frac{\overline{PV}}{\overline{PB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{RB'}}{\overline{RV}} \times \frac{\overline{SV}}{\overline{SB}},$$

ensuite à chaque droite du couple  $\{PR, QS\}$ ,

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{RB'}}{\overline{RV}} \times \frac{\overline{PV}}{\overline{PB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{C'B'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{QB'}}{\overline{QV}} \times \frac{\overline{SV}}{\overline{SB}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\overline{B'A} \times \overline{B'A'}}{\overline{BA} \times \overline{BA'}} &= \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B}} = \left( \frac{\overline{QB'}}{\overline{QV}} \times \frac{\overline{PV}}{\overline{PB}} \right) \times \left( \frac{\overline{RB'}}{\overline{RV}} \times \frac{\overline{SV}}{\overline{SB}} \right) \\ &= \left( \frac{\overline{RB'}}{\overline{RV}} \times \frac{\overline{PV}}{\overline{PB}} \right) \times \left( \frac{\overline{QB'}}{\overline{QV}} \times \frac{\overline{SV}}{\overline{SB}} \right) = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} \times \frac{\overline{C'B'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{B'C} \times \overline{B'C'}}{\overline{BC} \times \overline{BC'}}. \end{aligned}$$

5.4.12 Où l'on voit que c'est une même propriété de trois couples de rameaux déployés au tronc d'un arbre, quand ils sont tous d'une même ordonnance entre eux, et quand ils sont disposés comme ici aux quatre points  $P, Q, R, S$ , de façon que le but de l'ordonnance de trois couples couple de rameaux est comme si ces quatre points  $P, Q, R, S$  s'unissaient à un seul point.

5.4.13 Que si les deux bornales d'une couple  $\{PQU, RSU\}$  sont parallèles entre elles<sup>58</sup>, le rectangle des brins déployés  $\{AP, AQ\}$  est à son relatif le rectangle  $\{A'R, A'S\}$ , cinn le rectangle de la couple des quelconques de brins pliés au tronc  $\{AB, AB'\}$ , gémeau du rectangle  $\{AP, AQ\}$ , est à son relatif le rectangle des brins pliés au tronc  $\{A'B, A'B'\}$ , gémeau du rectangle  $\{A'R, A'S\}$ ; ce qui est évident du parallélisme de ces rameaux ou bornales entre elles  $PQ, RS$ .

5.4.14 Ce qui montre que quand en un plan, il y a cinq quelconques droites  $PS, RQ, BA', PQ$  et  $RS$ , dont les deux quelconques  $PQ, RS$  sont parallèles entre elles, étant la quelconque des autres trois  $BA'$  considérée comm tronc, et chacune des autres comme rameaux déployés à ce tronc, dont les deux parallèles  $PQ$  et  $RS$  soient une couple, et les autre deux  $PS, RQ$  soient une autre couple, les rectangles des couples de brins  $\{AP, AQ\}$  et  $\{A'R, A'S\}$  des deux rameaux d'une couple sont évidemment entre eux, comme  $\nabla$  leurs [ $\leftarrow$ leur] gémeaux pris d'un même ordre, les rectangles de  $\{AB, AB'\}$  et  $\{A'B, A'B'\}$  des brins de l'autre de ces couples de rameaux sont entre eux.

---

QED.

58. Du parallélisme :  $PQ \parallel RS$ , suit la similitude de trois couples de triangles :

$$\Delta PAB \sim \Delta SA'B, \Delta QAB' \sim \Delta RA'B' \text{ et } \Delta PQV \sim \Delta SRV,$$

et par là, les égalités suivantes. Dans les paragraphes 5.4.13 et 5.4.14,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{A'S}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{A'R}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{A'B'}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AP} \times \overline{AQ}}{\overline{A'R} \times \overline{A'S}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AB'}}{\overline{A'B} \times \overline{A'B'}}$$

dans le paragraphe 5.4.15,

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{RA'}} = \frac{\overline{QB'}}{\overline{RB'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{QP}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{QV}}{\overline{RV}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{QA} \times \overline{QP}}{\overline{RA'} \times \overline{RS}} = \frac{\overline{QB'} \times \overline{QV}}{\overline{RB'} \times \overline{RV}},$$

et dans le paragraphe 5.4.16,

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{SB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{PQ}}{\overline{SR}} = \frac{\overline{PV}}{\overline{SV}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{PA} \times \overline{PQ}}{\overline{SA'} \times \overline{SR}} = \frac{\overline{PB} \times \overline{PV}}{\overline{SB} \times \overline{SV}}.$$

5.4.15 C'est-à-dire, qu'aussi le rectangle  $\{QA, QP\}$  est évidemment au rectangle  $\{RA', RS\}$ , comme le rectangle  $\{QB', QV\}$  est au rectangle  $\{RB', RV\}$ .

5.4.16 Et qu'aussi le rectangle  $\{PA, PQ\}$  est évidemment au rectangle  $\{SA', SR\}$ , comme le rectangle  $\{PB, PV\}$  est au rectangle  $\{SB, SV\}$ .

5.4.17 Quand le bord courbe d'une quelconque coupe de rouleau passe à ces quatre points  $P, Q, R, S$ , ceux qui voudront chercher une démonstration en même paroles pour toutes les espèces de coupes le peuvent faire ; cependant en voici la démonstration en deux reprises, premièrement quand c'est le bord d'un cercle qui y passe, et ensuite de quelconque de ces autres espèces de coupe de rouleau.

5.4.18 Quand donc ces quatre bornes  $P, Q, R, S$  sont au bord d'un cercle, qui rencontre en  $\{D, D'\}$  cette septième quelconque droite  $CBC'$ .

5.4.19 En ce cas, prenant le rectangle comme  $\{VQ, VR\}$  pour  $\nabla$  moyen [ $\leftarrow$  mitoyen] entre le rectangle  $\{B'Q, B'R\}$  et  $\{BP, BS\}$ , c'est-à-dire, entre leurs égaux  $\{B'D, B'D'\}$  et  $\{BD, BD'\}$ , il est évident que le rectangle  $\{B'D, B'D'\}$ , ou son égal le rectangle  $\{B'Q, B'R\}$ , est au rectangle  $\{BD, BD'\}$ , ou son égal le rectangle  $\{BP, BS\}$ , en raison même que la composée des raisons du rectangle  $\{B'Q, B'R\}$  au rectangle  $\{VQ, VR\}$ , ou son égal le rectangle  $\{VP, VS\}$ , et du rectangle  $\{VQ, VR\}$ , ou son égal le rectangle  $\{VP, VS\}$ , au rectangle  $\{BP, BS\}$ .

5.4.20 // Or, le rectangle  $\{B'Q, B'R\}$ , égal du rectangle  $\{B'D, B'D'\}$  est au rectangle 18  $\{VQ, VR\}$ , égal du rectangle  $\{VP, VS\}$ , en raison  $\hat{=}$  même que la composée [ $\leftarrow$  composée] des raisons de  $QB'$  à  $QV$  et de  $RB'$  à  $RV$ .

5.4.21 Et le rectangle  $\{VP, VS\}$ , égal du rectangle  $\{VQ, VR\}$ , est au rectangle  $\{BP, BS\}$ , égal du rectangle  $\{BD, BD'\}$ , en raison  $\hat{=}$  même que la composée [ $\leftarrow$  composée] des raisons de  $PV$  à  $PB$  et de  $SV$  à  $SB$ .

5.4.22 Donc le rectangle  $\{B'D, B'D'\}$ , égal du rectangle  $\{B'Q, B'R\}$ , est au rectangle  $\{BD, BD'\}$ , égal du rectangle  $\{BP, BS\}$ , en raison même que composée des quatre raisons de  $QB'$  à  $QV$ , de  $RB'$  à  $RV$ , de  $PV$  à  $PB$  et de  $SV$  à  $SB$ , qui sont les quatre mêmes raisons dont est composée chacune des raisons, et du rectangle  $\{B'A, B'A'\}$  au rectangle

$\{BA, BA'\}$ , et du rectangle  $\{B'C, B'C'\}$  au rectangle  $\{BC, BC'\}$  <sup>59</sup>.

### 5.5 Coniques et *involution*

5.5.1 Et quand les quatre bornes  $P, Q, R, S$  sont au bord d'une quelconque autre espèce de coupe de rouleau, sans faire ici tant de figures pour un simple *Brouillon* de projet, si l'on se veut donner le divertissement d'en faire ailleurs, on verra que le rouleau duquel cette figure est coupe étant rétabli sur elle, et ensuite sur son assiette ou base le quelconque cercle  $PQRS$ .

5.5.2 Les quatre droites menées par le sommet de ce rouleau et par les quatre bornes qui sont au bord de cette quelconque coupe, filent par la surface du rouleau, et donnent au bord du cercle sa base aussi quatre bornes  $P, Q, R, S$ .

5.5.3 Et que les plans du sommet de ce rouleau et de chacune des droites bornales des trois couples menées par les quatre bornes de cette quelconque coupe, donnent au plan du cercle base de ce rouleau, par ces bornes  $P, Q, R, S$ , trois couples aussi de bornales  $\{PQ, RS\}, \{PS, QR\}, \{PR, QS\}$ .

5.5.4 Et que le plan du sommet de ce rouleau et de cette septième quelconque droite menée au plan de cette coupe, donne au plan du cercle base de ce rouleau, de même une septième quelconque droite  $A'CC'$ , qui rencontre en deux points  $\{D, D'\}$  le bord du cercle  $PQRS$  base ou assiette de ce rouleau, et laquelle droite  $A'CC'$  rencontre aussi aux

---

59. Démonstration du théorème III (2<sup>e</sup> partie : paragraphes 5.4.18 - 5.4.22). Dans un second temps, il s'agit de montrer que, si  $\Omega$  est un cercle, le couple  $\{D, D'\}$  des intersections de  $\Omega$  et de  $o$ , constitue une *involution* avec deux quelconques des trois couples constituant l'*involution* :  $I(\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\})$ .

Par la nature de la puissance d'un point par rapport à un cercle (voir le paragraphe 2.5.3),

$$\overline{BD} \times \overline{BD'} = \overline{BP} \times \overline{BS}, \quad \overline{B'D} \times \overline{B'D'} = \overline{B'Q} \times \overline{B'R}$$

$$\text{et } \overline{VP} \times \overline{VS} = \overline{VQ} \times \overline{VR}.$$

Donc

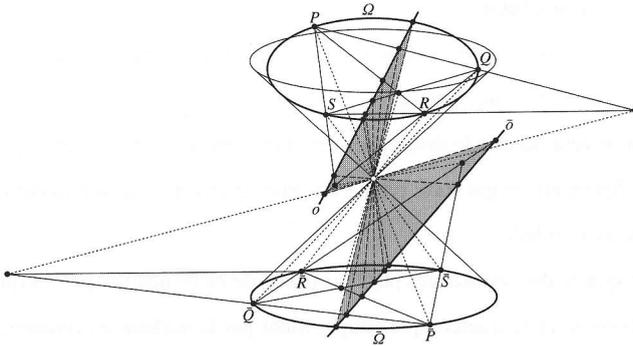
$$\frac{\overline{B'D} \times \overline{B'D'}}{\overline{BD} \times \overline{BD'}} = \frac{\overline{B'Q} \times \overline{B'R}}{\overline{VQ} \times \overline{VR}} \times \frac{\overline{VP} \times \overline{VS}}{\overline{BP} \times \overline{BS}} = \left( \frac{\overline{QB'}}{\overline{QV}} \times \frac{\overline{RB'}}{\overline{RV}} \right) \times \left( \frac{\overline{PV}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{SV}}{\overline{SB}} \right),$$

autrement dit,

$$\frac{\overline{B'D} \times \overline{B'D'}}{\overline{BD} \times \overline{BD'}} = \frac{\overline{B'A} \times \overline{B'A'}}{\overline{BA} \times \overline{BA'}} = \frac{\overline{B'C} \times \overline{B'C'}}{\overline{BC} \times \overline{BC'}}.$$

QED.

points comme  $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}$ , chacune des bornales des trois couples du plan de ce même cercle.



5.5.5 Et que les droites menées du sommet de ce rouleau par les points  $\{D, D'\}$  du bord de ce cercle sa base, passent en la septième quelconque droite du plan de cette coupe quelconque, aux même points qu'y donne le bord de cette coupe quelconque.

5.5.6 Et que les droites menées du sommet du rouleau par les points de chacune des couples de nœuds  $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}$  de la septième droite  $CC'$  du plan du cercle base de ce rouleau, passent aux points que donnent en la septième droite du plan de cette coupe, les trois couples de bornales ainsi menées en ce même plan.

5.5.7 Or, il est démontré que ces couples de nœuds  $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}, \{D, D'\}$  du plan du cercle sont en involution entre eux <sup>60</sup>.

5.5.8 Et la ramée de cet arbre en trois ou quatre couple de rameaux, tous d'une même ordonnance, dont le but est le sommet de ce rouleau, donne en cette septième droite du plan de cette coupe autant de couples de nœuds aussi d'une involution <sup>61</sup>.

5.5.9 Cette démonstration, bien entendue, s'applique en nombre d'occasions, et fait voir la semblable génération de chacune des droites et points remarquables en chaque espèce de coupe de rouleau, et rarement une quelconque droite au plan d'une quelconque

60. Voir la section 5.4.

61. Voir la section 4.2.

coupe de rouleau peut avoir une propriété considérable à l'égard de cette coupe, qu'au plan d'une autre coupe de ce rouleau, la position et les propriétés d'une droite correspondante à celle-là soit aussi donnée <sup>0</sup>par [ $\leftarrow$  par  $r$ ] une semblable construction de ramée d'une ordonnance dont le but soit au sommet du rouleau <sup>62</sup>.

[Droites ordonnées à un même tel but, c'est-à-dire, qui passent ou tendent ensemble à ce tel but.]

**5.6 Propriétés métriques du cercle**

5.6.1 Mais avant que passer outre aux propositions générales des quelconques coupes du rouleau, <sup>∇</sup>il [ $\leftarrow$  possible il] ne sera pas mal à propos de donner encore une des propositions particulières du plan du cercle <sup>63</sup>.

[Cette proposition est de la figure VI.]

5.6.2 Quand en la diamétrale  $A_mO$  d'un cercle  $LMBC$  <sup>64</sup>, deux quelconques points  $\{A_m, A_n\}$  sont couplés entre eux en involution avec les deux points  $\{B, C\}$ , qu'y donne le bord du cercle.

5.6.3 Que deux droites  $\{LA_mM, LA_nN\}$ , ordonnées à un quelconque point  $L$  au bord de ce cercle, passent à ces deux points  $\{A_m, A_n\}$ .

62. Démonstration du théorème III (3<sup>e</sup> partie: paragraphes 5.5.1 - 5.5. 9). Dans cette dernière étape de la preuve, le théorème, déjà démontré sur le cercle, se trouve étendu sur les coniques en général.

Supposons que  $\Omega$  ne soit pas un cercle. Soit  $\bar{\Omega}$  la base du cône dont  $\Omega$  soit une coupe. On construit les points  $\bar{P}, \bar{Q}$ , etc. sur  $\bar{\Omega}$ , en telle sorte que

$$(PQRS)(AA')(BB')(CC')(DD') \overset{\text{sommet du cône}}{\bar{\lambda}} (\bar{P}\bar{Q}\bar{R}\bar{S})(\bar{A}\bar{A}')(\bar{B}\bar{B}')(\bar{C}\bar{C}')(\bar{D}\bar{D}')$$

$\bar{\Omega}$  étant un cercle, trois quelconques des couples  $\{\bar{A}, \bar{A}'\}, \{\bar{B}, \bar{B}'\}, \{\bar{C}, \bar{C}'\}, \{\bar{D}, \bar{D}'\}$  constituent une involution, par ce qui vient d'être démontré. D'où s'ensuit que, par le théorème II, trois quelconques des couples  $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}, \{D, D'\}$  aussi constituent une involution. QED.

Ainsi le fondement d'une théorie perspectiviste des coniques, tellement unificatrice que la distinction bien admise : ellipse, parabole et hyperbole, y est superflue, se trouve-t-il bien établi.

63. Dans cette section Desargues donne quatre séries de propriétés du cercle, découlant principalement du corollaire 6 (paragraphe 4.4.2). Ces propriétés, toutes métriques, s'écartent plus ou moins du développement de la géométrie projective, comme celles de la sections 3.9.

64. Table des cotes des points (section 5.6) :

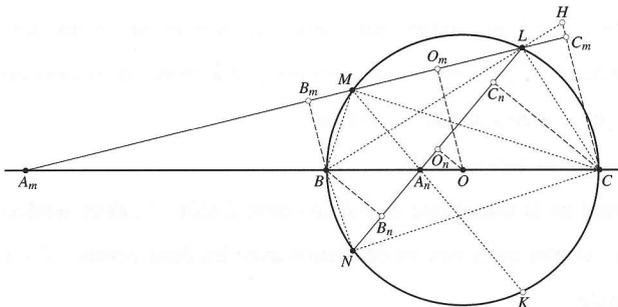
notre transcription	$O$	$A_m$	$A_n$	$B$	$C$	$L$	$M$	$N$	$H$	$K$
version originale	7	A	I	E	C	L	M	S	H	X

notre transcription	$O_m$	$B_m$	$C_m$	$O_n$	$B_n$	$C_n$	$A_\mu$	$\bar{A}_n$	$\bar{B}$	$P$	$Q$
version originale	B	R	P	D	O	N	Z	K	Q	G	Y

5.6.4 Qu'à chacun des points  $\{B, C\}$  et au centre du cercle  $O$ , passe une couple de droites  $\{BB_m, BB_n\}$ ,  $\{CC_m, CC_n\}$ ,  $\{OO_m, OO_n\}$ , conjuguées, et par la nature du centre ici perpendiculaires aux deux droites  $\{LA_m, LA_n\}$ , ordonnées à un quelconque point  $L$  au bord de cette cercle, auxquelles elles donnent les points  $\diamond\{B_m, B_n\}$ ,  $\{C_m, C_n\}$  et  $\{O_m, O_n\}$  [ $\Leftarrow B_m, E_n, C_m, C_n$ ].

$\diamond$ 5.6.5 Deux droites, chacune parallèle à un de deux diamètres d'une coupe de rouleur conjugués entre eux, sont ici nommées *conjugales* entre elles.



5.6.6 La pièce de la quelconque de ces deux droites  $\{LA_m, LA_n\}$ , contenue entre  $\diamond$ les [ $\Leftarrow$  ces] deux points qu'y donnent les  $\diamond$ conjugales [ $\Leftarrow$  conjuguées] venant des points  $\{B, C\}$ , est égale à la pièce de l'autre des mêmes droites  $\{LA_m, LA_n\}$ , qui est contenue entre les points qu'y donne le bord du cercle.

5.6.7 C'est-à-dire que la pièce  $B_nC_n$  de la droite  $LA_n$  est égale à la pièce  $LM$  de la droite  $LA_m$ , et que la pièce  $B_mC_m$  de la mme droite  $LA_m$  est égale à la pièce  $LN$  de la droite  $LA_n$ .

5.6.8 Et davantage, le rectangle de chacune des couples de ces conjuguées venant des points  $B //$  et  $C$  sur chacune de ces droites  $\{LA_m, LA_n\}$ , est égal au rectangle des deux 19 pièces de celle des deux  $\{LA_m, LA_n\}$  à laquelle elles sont conjuguées, contenues entre l'un des points qu'y donne le bord du cercle, et chacun des points qu'y donnent ces deux conjuguées.

5.6.9 C'est-à-dire que le rectangle  $\{BB_m, CC_m\}$  est égal au rectangle  $\{LB_m, LC_m\}$ , et

que le rectangle  $\{BC_n, CC_n\}$  est égal au rectangle  $\{LB_n, LC_n\}$  <sup>65</sup>.

5.6.10 Car, comme  $OO_m$  mipartit  $BC$  en  $O$ , de même à cause du parallélisme d'entre  $BB_m, OO_m, CC_m$ , elle mipartit  $B_mC_m$  en  $O_m$ , mais de la nature du cercle elle mipartit aussi  $LM$  en  $O_m$ ; partant, les deux pièces  $\{LC_m, MB_m\}$  sont égales entre elles.

5.6.11 Semblablement et par mêmes raisons, comme  $OO_n$  mipartit  $BC$  en  $O$ , de même elle mipartit  $B_nC_n$  en  $O_n$ , mais elle mipartit aussi  $LN$  en  $O_n$ ; partant, les deux pièces  $\{LC_n, NB_n\}$  sont égales entre elles.

5.6.12 Davantage, ayant mené la droite  $LB$  qui donne  $H$  en  $CC_m$ , et la droite  $LC$ , les deux  $\{BL, CL\}$  sont perpendiculaires entre elles, vu le demi-cercle  $BLC$ .

5.6.13 Et puisque les quatre points  $A_m, B, A_n, C$  sont en involution, ces perpendiculaires  $\{BL, CL\}$  mipartissent chacune un des angles que les deux droites  $\{A_mL, A_nL\}$  font entre elles.

5.6.14 Ainsi les triangles rectangles  $\{CLC_m, CLC_n\}$  sont semblables, et à cause de leur côté commun  $CL$ , ils sont égaux entre eux.

5.6.15 Et semblablement, les triangles rectangles  $\{LBB_m, LBB_n\}$  sont semblables, et à cause de leur côté commun  $BL$ , ils sont égaux entre eux.

5.6.16 Ainsi les droite  $\{LB_m, LB_n\}$  sont égales entre elles, et les droite  $\{LC_m, LC_n\}$ , égales entre elles.

5.6.17 Mais les droites  $\{LC_n, NB_n\}$  sont égales entre elles, donc les droites  $LC_m, NB_n, MB_m$  sont égales entre elles; conséquemment, les droites  $\{B_nC_n, LM\}$  sont égales entre elles, et les droite  $\{B_mC_m, LN\}$ , égales entre elles.

5.6.18 Et menant la droite  $MA_n$  jusques au bord du cercle  $K$ , il est évident que les deux pièces  $\{A_nL, A_nK\}$  sont égales entre elles, et les deux pièces  $\{A_nM, A_nN\}$ , égales entre elles.

°5.6.19 Car, ayant mené les deux droites  $MB, MC$ , vu le demi-cercle, elles sont per-

---

65. De la congruence de deux couples de triangles  $\{CC_mL, CC_nL\}$  et  $\{LB_mB, LB_nB\}$ , et de la similitude de ces quatre, s'ensuivent les deux premières séries de propriétés:

(1)  $|B_mC_m| = |LM|$  et  $|B_nC_n| = |LN|$  (paragraphe 5.6.6, 5.6.7 et 5.6.10- 5.6.16);

(2)  $|BB_m| \times |CC_m| = |LB_m| \times |LC_m| = |MB_m| \times |MC_m|$  et  $|BB_n| \times |CC_n| = |LB_n| \times |LC_n| = |MB_n| \times |MC_n|$  (paragraphe 5.6.8, 5.6.9 et 5.6.21 - 5.6.24).

pendiculaires entre elles; partant, elles mpartissent chacune un des angles que les deux droites  $MA_mL$ ,  $MA_nK$  font entre elles.

5.6.20 Ainsi les deux pièces  $\{A_nL, A_nM\}$  sont égales aux deux pièces  $\{A_nK, A_nN\}$ ; ou autrement,  $LN$ , différence ou somme des deux pièces  $\{A_nL, A_nM\}$ , est égale à  $B_mC_m$ , c'est-à-dire que  $B_mC_m$  est égale à la somme ou à la différence des deux  $\{A_nL, A_nM\}$ .

5.6.21 Maintenant, puisque  $BL$  est perpendiculaire à  $CL$ , le triangle  $CLH$  est rectangle, et à son angle droit au point  $L$  passe la droite  $A_mC_m$ , perpendiculaire à son côté  $CH$ , base de l'angle droit  $CLH$ ; ainsi le triangle  $LC_mH$  est semblable à chacun des triangles aussi rectangles  $CLH$  et  ${}^{\circ}CC_mL$  [ $\leftarrow CC_mH$ ].

5.6.22 Et à cause du parallélisme d'entre les droites  $\nabla\{CC_m, BB_m\}$  [ $\leftarrow\{CC_mH, BB_m\ddot{B}\}$ ] <sup>66</sup>, le même triangle  $LC_mH$  est encore semblable à chacun des deux triangles aussi rectangles  $LB_mB$  et  $LB_nB$ .

5.6.23 Partant, les triangles rectangles  $CC_mL$ ,  $LB_mB$ ,  $CC_nL$  et  $LB_nB$  sont semblables entre eux; conséquemment  $CC_m$  est à  $LB_m$ , comme  $LC_m$  est à  $BB_m$ , et le rectangle des deux extrêmes  $\{BB_m, CC_m\}$ , qui sont les deux conjuguées perpendiculaires venant des points  $B, C$  sur la droite  $LA_m$ , est égal au rectangle des moyennes  $\{LE_m, LC_m\}$ , qui sont les deux pièces de la même droite  $LA_m$ , contenues entre l'un des points  $L$ , qu'y donne le bord du cercle, et chacun des points  $B_m, C_m$ , qu'y donnent ces deux conjuguées perpendiculaires  $\{BB_m, CC_m\}$ . Et en menant les droites  $MB, MC$ , par même raisonnement, on démontrera que les triangles  $BB_mB, CC_mM$  sont semblables; et allongeant les droites  $CM, BB_m$ , on démontrera semblablement que les rectangles  $\{BB_m, CC_m\}$  et  $\{MB_m, MC_m\}$  sont égaux entre eux.

5.6.24 Davantage, les triangles  $CC_nL, LB_nB$  étant semblables entre eux,  $CC_n$  est à  $LB_n$ , comme  $C_nL$  est à  $B_nB$ , et le rectangle des extrêmes les conjuguées perpendiculaires  $\{BE_n, CC_n\}$  est égal au rectangle des moyennes  $\{LB_n, LC_n\}$ , qui sont les deux pièces de  $LA_n$ , contenues entre un des points  $L$ , qu'y donne le bord du cercle, et chacun des points  $B_n, C_n$ , qu'y donnent ses deux conjuguées perpendiculaires  $\{BB_n, CC_n\}$ .

66.  $\ddot{B}$  ne sera défini que dans le paragraphe 5.6.25, où commence une nouvelle série de propriétés.



c'est-à-dire, à cause du parallélisme d'entre  $A_\mu\check{A}_n, B_m\check{B}$ , comme  $B_mC_m$  est à  $B_m\check{B}$ .

5.6.28 Davantage, à cause du parallélisme d'entre les droites  $CC_m, OO_m, A_nA_\mu, BB_m$ , et que les points  $A_m, B, A_n, C$  sont en involution, et que  $O$  en mipartit le brin  $BC$ , suit que  $OA_n, OB, OA_m$  sont proportionnelles, et  ${}^\circ A_nA_m, A_nB, A_nC, A_nO$  [ $= A_nA_m, A_nB, A_nO, A_nC$ ], deux à deux proportionnelles, et  $A_mC, A_mO, A_mA_n, A_mB$ , deux à deux proportionnelles <sup>68</sup>, et  $CC_m, OO_m, A_nA, BB_m$ , deux à deux proportionnelles en même raisons que les quatre  $A_mC, A_mO, A_mA_n, A_mB$  entre elles, et que les quatre  $A_mC_m, A_mO_m, A_mA, A_mB_m$  entre elles.

5.6.29 De là suit que comme le rectangle  $\{A_mA_\mu, A_mA_\mu\}$  est au rectangle  $\{A_mB_m, A_mC_m\}$ , ou à son égal le rectangle  $\{A_mA_\mu, A_mO_m\}$ , c'est-à-dire, comme la branche  $A_mA_\mu$  est à son  ${}^\circ$ accouplée[ $=$  atcouplée] la branche  $A_nO_m$ , c'est-à-dire, comme le rectangle des brins  $\{A_mB_m, A_mC_m\}$  est à son relatif le rectangle  $\{O_mB_m, O_mC_m\}$ , ainsi le rectangle  $\{A_nA_\mu, A_nA_\mu\}$  est à chacun des rectangles égaux  $\{A_nA_\mu, OO_m\}$ ,  $\{BB_m, CC_m\}$ , et  $\{LB_m, LC_m\}$  ou  $\{MB_m, MC_m\}$ .

[Cette proposition est de la figure lill.]

5.6.30 En en changeant, comme le rectangle  $\{A_mB_m, A_mC_m\}$  est au rectangle  $\{A_nA_\mu, A_nA_\mu\}$ , c'est-à-dire comme  $B_mC_m$  est à  $B_m\check{B}$ , ainsi le rectangle  $\{O_mB_m, O_mC_m\}$  est à chacun des rectangles égaux  $\{BB_m, CC_m\}$ ,  $\{A_nA_\mu, OO_m\}$  et  $\{LB_m, LC_m\}$  ou  $\{MB_m, MC_m\}$  <sup>69</sup>.

68. Voir le corollaire 4 (section 3.8).

69. Démonstration de (3). Par la similitude  $\Delta BmCm\check{B} \sim \Delta A_\mu C_m \check{A}_n$  et l'hypothèse:

$$\frac{|B_mC_m|}{|B_m\check{B}|} = \frac{|A_\mu C_m|}{|A_\mu\check{A}_n|} = \frac{|A_\mu B_m| \times |A_\mu C_m|}{|A_\mu\check{A}_n| \times |A_\mu B_m|} = \frac{|A_\mu B_m| \times |A_\mu C_m|}{|A_\mu A_n| \times |A_\mu A_n|}. \quad (5.6.27)$$

Par les involutions  $I^O(\{A_m, A_n\}, \{B\}^2, \{C\}^2)_m$  et  $I^{Om}((A_m, A_\mu), \{B_m\}^2, \{C_m\}^2)_m$ , et la similitude  $\Delta A_mB_m \sim \Delta A_nA_nA_\mu \sim \Delta A_mO_m \sim \Delta A_mC_m$ :

$$|A_mA_n| \times |A_mO| = |A_mB| \times |A_mC|, \quad |A_nA_\mu| \times |A_nO_m| = |A_nB_m| \times |A_nC_m|$$

$$\text{et } |A_nA_\mu| \times |OO_m| = |BB_m| \times |CC_m| \quad (5.6.28)$$

Or, d'une part, par l'involution  $I^{Am}((A_\mu, O_m), \{B_m, C_m\})$ :

$$\frac{|A_mA_\mu|}{|A_mO_m|} = \frac{|A_\mu B_m| \times |A_\mu C_m|}{|O_mB_m| \times |O_mC_m|}$$

5.6.31 Mais comme  $B_m C_m$  est à  $B_m \check{B}$ , ainsi aussi le rectangle  $\{B_m C_m, B_m C_m\}$  est au rectangle  $\{B_m C_m, B_m \check{B}\}$ , donc le rectangle  $\{O_m B_m, O_m C_m\}$  est à chacun des rectangles égaux  $\{BB_m, CC_m\}$ ,  $\{A_n A_\mu, OO_m\}$  et  $\{LB_m, LC_m\}$ ,  $\{MB_m, MC_m\}$ , comme le rectangle  $\{B_m C_m, B_m C_m\}$  est au rectangle  $\{B_m C_m, B_m \check{B}\}$ , et en changeant, le rectangle  $\{O_m B_m, O_m C_m\}$  est au rectangle  $\{B_m C_m, B_m C_m\}$ , comme chacun des rectangles égaux  $\{BB_m, CC_m\}$ ,  $\{A_n A_\mu, OO_m\}$ ,  $\{LB_m, LC_m\}$ ,  $\{MB_m, MC_m\}$ , au rectangle  $\{B_m C_m, B_m \check{B}\}$ .

5.6.32 Or est-il qu'à cause que  $B_m C_m$  est mipartie en  $O_m$ , le rectangle  $\{O_m B_m, O_m C_m\}$  est le quatrième partie du rectangle  $\{B_m C_m, B_m C_m\}$ , donc aussi, chacun des rectangles égaux  $\{BB_m, CC_m\}$ ,  $\{A_n A_\mu, OO_m\}$ ,  $\{LB_m, LC_m\}$ ,  $\{MB_m, MC_m\}$  est la quatrième partie du rectangle  $\{B_m C_m, B_m \check{B}\}$  <sup>70</sup>.

5.6.33 À quoi si l'on ajoute que la droite  $BL$  mipartissant l'angle  $MLN$ , et la droite  $CM$  mipartissant l'angle  $KML$ , les pièces du bord du cercle  $\{BM, BN\}$  sont égales entre elles et les pièces  $\{CK, CL\}$ , égales entre elles; d'où suit que la droite  $BA_n C$  mipartit l'un des angles que les droite  $A_n L, A_n M$  font entre elles, et que la droite  $PA_n Q$ , perpendiculaire à

---

et d'autre part, par la similitude  $\Delta A_n A_\mu A_\mu \sim \Delta A_n O_m$  :

$$\frac{|A_m A_\mu|}{|A_m O_m|} = \frac{|A_n A_\mu|}{|OO_m|} = \frac{|A_n A_\mu| \times |A_n A_\mu|}{|A_n A_\mu| \times |OO_m|} = \frac{|A_n A_\mu| \times |A_n A_\mu|}{|BB_m| \times |CC_m|},$$

donc

$$\frac{|A_\mu B_m| \times |A_\mu C_m|}{|O_m B_m| \times |O_m C_m|} = \frac{|A_n A_\mu| \times |A_n A_\mu|}{|BB_m| \times |CC_m|}, \tag{5.6.29}$$

c'est-à-dire

$$\frac{|A_\mu B_m| \times |A_\mu C_m|}{|A_\mu A_n| \times |A_\mu A_n|} = \frac{|O_m B_m| \times |O_m C_m|}{|BB_m| \times |CC_m|}.$$

D'où la conclusion:

$$\frac{|B_m C_m|}{|B_m \check{B}|} = \frac{|O_m B_m| \times |O_m C_m|}{|BB_m| \times |CC_m|} = \text{etc.}$$

QED.

70. 70. Voilà la dernière série de propriétés (paragraphe 5.6.32, 5.6.33) : (4) étant données les mêmes conditions que dans (3),

$$\begin{aligned} \frac{|B_m C_m| \times |B_m \check{B}|}{4} &= |BB_m| \times |CC_m| = |A_n A_\mu| \times |OO_m| \\ &= |LB_m| \times |LC_m| = |MB_m| \times |MC_m|. \end{aligned}$$

En effet, par (3),

$$\frac{|O_m B_m| \times |O_m C_m|}{|BB_m| \times |CC_m|} = \text{etc.} = \frac{|B_m C_m|}{|B_m \check{B}|} = \frac{|B_m C_m| \times |B_m C_m|}{|B_m C_m| \times |B_m \check{B}|},$$

donc

$$|BB_m| \times |CC_m| = \text{etc.} = \frac{|O_m B_m| \times |O_m C_m|}{|B_m C_m| \times |B_m C_m|} \times (|B_m C_m| \times |B_m \check{B}|).$$

Or,  $O_m$  étant le milieu du segment  $B_n C_m$ , on obtient la conclusion. QED.



## 論文要旨

# 「巻き込み」の不変性 デザルグ『計画草稿』転記の試み（第二部）

久木田 英史

鍵語：デザルグ・数学史・射影幾何学・  
17世紀・フランス文化

30ページからなる『計画草稿』（1639）のうち、最初の10ページでデザルグが定義した「巻き込み（involution）」は、19世紀以降の射影幾何学における基本概念「非調和比（rapport anharmonique）」と本質的に等価である。今回転記の対象となる中間部の10ページでは、デザルグが透視図法を通じて構想した円錐曲線論を基礎付ける、以下の命題が証明される。

- ・ 「巻き込み」は射影変換において不変である。
- ・ 円錐曲線と、それに内接する完全四角形とを任意の直線で切断すると、「巻き込み」を形成する点列が切線上に得られる。

これらの命題の証明には、三点の共線性に関するメネラウスの定理、点の円に対する方冪に関するユークリッドの定理が巧妙に用いられる。図形の射影的性質の証明に計量的性質が駆使される点に、時代に先駆けた幾何学者、デザルグの苦闘が偲ばれる。