射影幾何学の起源（1）

— ジラール・デザルグ『計画草稿』（1639）における無限概念 —

久木田 英史

鍵語：近代・数学史・射影幾何学・デザルグ・無限

緒言

本稿は今日「射影幾何学」と呼ばれる理論体系の生成に関する史的研究への序章をなすが、この主題の指し示すところは、本稿末の書誌からも推察されるように、コペルニクスからニュートンを経て、近代科学の劈頭を画するに至る巨大な数学的・自然学的・形而上学的変動の、従来ほとんど顧みられることのなかった一側面とされなければならない。ここではその幾何学の創始者、デカルトの友にしてパスカルの師であるジラール・デザルグ（1591-1661）の主著『円錐の平面との交わりの事象生起到達計画草稿』（1639）の冒頭の一句を分析し、射影幾何学の起源において無限概念の演じた枢要な役割を明らかにしたい。以下、その簡単な見取り図である。

天文学・光学探求の過程で放物線の第二の焦点を無限遠の距離に見出し、こうして（有限な距離に二つの焦点を持つ）楕円・双曲線を含む円錐曲線全体の連続性を確保したケプラーの後を追って、デザルグは幾何学に無限大の概念を導入し、「任意の異なる二つの点がただ一つの直線で結ばれる」のと全く同様に、「任意の異なる二つの直線がただ一つの点で交わる」ことを要請する。これはユークリッド幾何学と異なり、平行線が無限遠の点という理念的な点において交わることを意味するが、「平行線は交わる」というこの一見異様な着想は、ルネサンスに端を発する幾何学的絵画技法、すなわち透視図法の枠組みで考えれば、実は日常的な視覚の経験に寄り添うものである。有能な技師・建築家でもあったデザルグは透視図法に通暁していたが、当時の最先端を行く実践的にして理論的なこの知は、連続的・均質・無限と解される近代の合理的・数学的空間概念を、感性の水準で象徴するものだった。デカルト流解析幾何学

の隆盛の影に蔽われた一世紀半もの忘却の後、デザルグの大胆な発案からは、ユークリッド幾何学だけでなく、そのユークリッド幾何学の平行線公理、すなわち「ある直線の上にない点を通り、その直線に平行な直線はただ一つである」という常識的な命題を否定する非ユークリッド幾何学も導かれることが明かされるだろう。

第１節　無限空間とヨーロッパ近代

円と、その円を含む平面上にない点を考える。与えられた点と円周上の各点とを、双方向にどこまでも延びる直線で結ぶと、頂点で相対する二個の円錐が得られる。その円錐を、一個の平面で切断してみよう。一般に切断面が円錐の頂点を通らなければ、切断面の角度に応じて、切り口の輪郭は楕円（真円を含む）になるか、放物線になるか、双曲線になるかのいずれかである。特殊な場合として切断面が円錐の頂点を通れば、やはり切断面の角度に応じて、切り口はただ一個の点ないし一本の直線になるか、あるいはその輪郭が、円錐の頂点で交わる二直線になるかのいずれかである。このような、平面による円錐の切り口の輪郭として得られる平面図形を総称して、円錐曲線という。

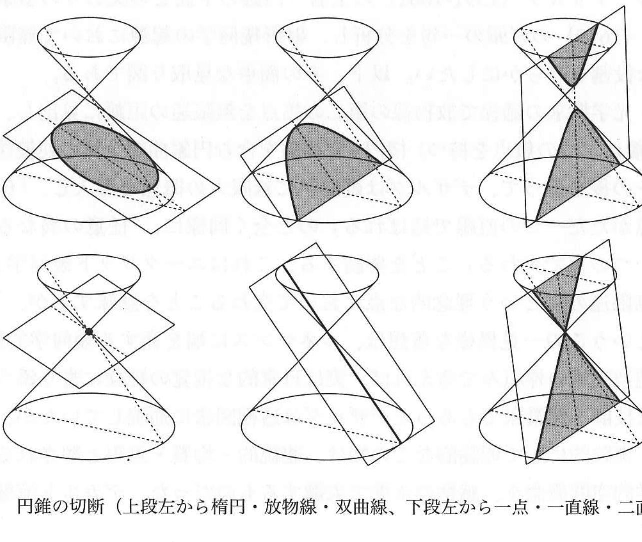


図１　円錐の切断（上段左から楕円・放物線・双曲線、下段左から一点・一直線・二直線）

円錐曲線はその美しい形態で、古来、数学的な興味の対象となってきただけではない。17 世紀初頭、ヨハンネス・ケプラーは惑星軌道を楕円として、ガリレオ・ガ

リレオは自由落体の軌道を放物線として、いずれも自然界の現象を円錐曲線という数学の言葉で描き出した。古典物理学の黎明である。これに先立つ16世紀後半、数学に通暁したイタリアの人文学者フェデリコ・コンマンディーノとその弟子たちは、ヨーロッパで長らく忘れられていた古典ギリシャ数学の精華を信頼に足るラテン語に移したが、そこにはユークリッド『原論[*1]』（1572年）やシラクサのアルキメデスの著作集[*2]（1558年）と並び、ペルガ（現トルコの小都市）のアポロニオスによる書物[*3]（1566年）が含まれ、これが円錐曲線研究の最高峰として、第一線の学者たちから尊重されることになる。記号代数学と暗号術の祖、フランス宮廷の高官フランソワ・ヴィエートは自らの幾何学書を『フランスのアポロニオス[*4]』と題し（1600年）、その後ヨーロッパ各地で、アポロニオスの名を冠する数学書の刊行が相次いでいく[*5]。1637年、『方法序説』三付論の一つ『幾何学』で、近代哲学の祖ルネ・デカルトは「ユークリッドにより着手され、アポロニオスにより追究され、まだ何人にも完遂されていない問題[*6]」を鮮やかに解決し、自らの「方法」の卓越を誇示する。このように「アポロニオス」が最高難度の幾何学を意味し、円錐曲線論が学問の最先端の話題だった時代、アポロニオスの流儀を離れ、透視図法、すなわち15世紀イタリア・ルネサンスに端を発する絵画技法を発想の源に、円錐曲線の様々な性質を鮮やかに解明したのが、デカルトとも親交のあったジラール・デザルグ（1591-1661）である。後に「射影幾何学」と呼ばれるその幾何学は、余りの斬新さゆえに却って、一旦は忘却の淵に沈まなくてはならなかった。時を同じくしてデカルトの提唱した「解析幾何学」、すなわち代数学というこれまた当時最新の数学技法により、図形問題を単なる計算問題に帰してしまう極めて強力な幾何学が、近代ヨーロッパを特徴付ける数学的自然学の展開の舞台装置として、数学史の表舞台を占めるのである。デザルグの真価が漸く気付かれたのは、一世紀半もの時を経た後のことでしかない。

---

*1. Federico Commandino, *Euclidis elementorum libri XV*, Pesaro, 1572.

*2. *Idem.*, *Archimedis opera non nulla*, Venezia, 1558.

*3. *Idem.*, *Apollonii Pergae conicorum libri quattuor*, Bologna, 1566.

*4. François Viète, *Apollonius Gallus*, Paris, 1600.

*5. マリーノ・ゲタルディ『蘇ったアポロニオス』(Marino Ghetaldi, *Apollonius redivivus*, Venezia, 1607)、ヴィレブロルト・スネル『オランダのアポロニオス』(Willebrord Snell, *Apollonius Batavus*, Lugodini, 1608) など。

*6. « La question donc, qui avait été commencée à résoudre par Euclide et poursuivie par Apollonius, sans avoir été achevée par personne », René Descartes, *Œuvres de Descartes*, 11 vol., éd par Charles Adam et Paul Tannery, Vrin, 1996（以下ATと略記）, t.VI, p.379.

さて、透視図法とは何か。近くのものは大きく見え、遠くのものは小さく見える。この当たり前のような事実を表現しようとすれば、絵画はある瞬間での、ある視点、ある照明における物の現れ、いわば錯視の表現となる。高さと幅から成る二次元平面で奥行きという第三の次元を錯覚させるための工夫は、何もヨーロッパ・ルネサンス期の絵画に限られないが、15 世紀のフィレンツェで最初に結晶し、以後 19 世紀後半に至るまでヨーロッパ絵画の基本原理であり続けた透視図法の特異性は何より、その画面構成がユークリッド的な古典幾何学により厳密に規定されている点に存する。1443 年、透視図法に関する史上初の理論書として著された『絵画論』で、画家にして幾何学者レオ・バッティスタ・アルベルティは

> 画家にとって、これ程多くの問題を掘り下げるのが、何の役に立つというのか。私は即座に、以下の絵画の定義により答えよう。絵画とは視覚のピラミッドの切断に他ならない。そこでは与えられた距離により中心が定められ、人為的な線と色彩により表されたある表面との間に光の筋が構成される [*7]。

と宣言する。

ここでの「視覚のピラミッド」とは、観察者の目の位置を頂点、視野を底面とする円錐を、切断面である画面の形状に合わせて表現したものに他ならない。画面に奥行きを与えるのに効果的な技法として、この時代の絵画では、例えば地面に敷き詰められた正方形のタイルや敷石が頻繁に描かれるが、その「正則な作図」、すなわちユークリッド幾何学の法則による作図を、アルベルティは次のように示す。

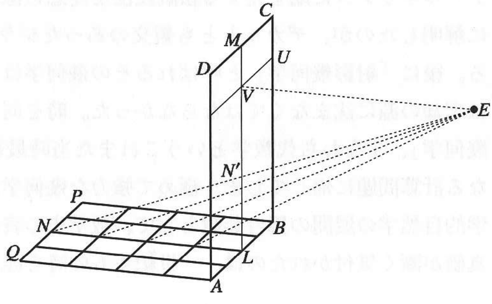


図 2 「正則な作図」(俯瞰図)

*7. « Que sert-il au peintre de creuser tant de problèmes ? Et je répondrai aussitôt par cette définition de la peinture : la peinture ne sera donc que l'intersection de la pyramide visuelle selon une distance donnée, une fois établi le centre et constitués les rayons d'une certaine surface, représentée par des lignes et des couleurs artificielles. » Leo Battista Alberti, *Trattato della pittura*, Nürmberg, 1511, cité in Albert Flocon et René Taton, *Perspective*, PUF, 1963, p.43

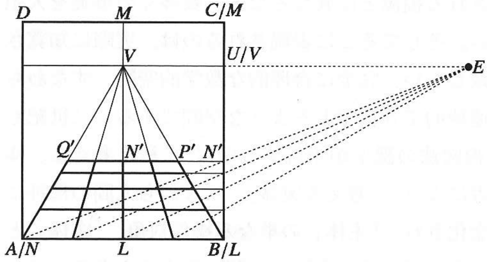


図3　「正則な作図」（正面図＋側面図）

上の俯瞰図（図2）で、*ABPQ* を地面、*ABCD* を画面、*E* を観察者の目の位置とする。*E* から *ABCD* に下ろした垂線の足を *V* とすれば、*V* を通り地面に平行な直線 *UV* は、画面上で無限遠の地平線を表す。*AB* と直交する地面上の任意の直線は、画面では全て *V* に収斂するので、*V* をこの画面の消失点という。この図を正面から見た平面 *ABCD* と側面から見た平面 *NLEV* を、二個の合同な直角三角形、正面図の *ABC* と側面図の *NLM* が一致するように重ねると、地面を敷き詰めている正方形を表す四角形が、図3のように作図される。

地面の正方形の格子 *ABPQ* を視点 *E* から射影し、画面で切断して得られた格子像 *ABP′Q′* は、最早正方形ではない。等辺だった線分の長さや、直角だった角の大きさは、視点（円錐の頂点）と画面（円錐の切断面）の取り方次第で、変幻自在に揺れ動く。変わらないのはただ、一直線の上にある複数の点、一点で交わる複数の直線という、点と直線の間の位置関係だけである。この、「射影」と「切断」の操作を通じて不変なまま保たれる図形の性質に専ら着目して構築されるのが、デザルグの円錐曲線論を起源とする「射影幾何学」に他ならない。これに対し、ユークリッドの集大成した古典的な幾何学では、例えば有名なピュタゴラス（三平方）の定理

> 直角三角形において、斜辺を一辺とする正方形の面積は、直角を挟む二辺をそれぞれ一辺とする二個の正方形の面積の和に等しい。

が典型的にそうであるように、線分の長さ、角の大きさ、面積等、主として量的概念が問われるので、そのような幾何学は「計量幾何学」として特徴付けられる。有為転変を超越した永遠の本質ではなく、それどころか移りゆく影を追う幾何学の誕生は、フランス絶対王政の確立前夜、安定や均衡を欠くことが世の定めのようであった17世紀前半、今日「バロック」と呼ばれる近代の胎動期に、いかにも相応しい。

さて、任意の画像が視点と画面との位置関係から統一的に導かれる透視図法の空間処理は、知覚の生理的・心理的な諸条件、例えば人間の目は一個ではなく二個である、外光の投射される（すなわち視覚の円錐を切断する）網膜は平面ではなく、寧ろ

球面に近い、物理的な網膜像と意識される視像とは異なるなど、数多くの事実を大胆に捨象するのでなければ成り立たない。そしてそこに表現されるのは、実際に知覚され、生きられる空間とは必ずしも一致しない、完全に合理的な数学的空間、すなわち無限に拡がり、そのどこをとっても連続的で等質であるような空間である。二世紀もの時の隔たりを恐れずに言えば、透視図法の誕生が予告するのは、「私は考える。ゆえに私は存在する」と宣言する哲学者により、「考える実体」、すなわち人間の精神に対する計量可能な「延長」として概念化され、「主体」の単なる操作対象、「客体」としてのみ把握されるであろう、そのような近代的な事物の空間の出来でもある。アルベルティらに端を発する幾何学的絵画技法が、レオナルド・ダ・ヴィンチやアルブレヒト・デューラーのような傑出した実作者により理論・実践の両面で深化されていくのは、目を転じると、当時としてはそれこそ驚天動地の宇宙観、地動説がミコワイ・コペルニク（ニコラウス・コペルニクス）の胸中に温められていくのとほぼ同じ頃である。更に一歩踏み込んで宇宙の無限を公然と説いたジョルダーノ・ブルーノが異端として焚刑に処されたのは、逸脱的な思想の勃興に対する宗教的権威の危機感を証拠立てるものでしかない。この世界は最早、アリストテレスやスコラ学の説くような、地球を中心として最外殻の恒星天に取り囲まれた、閉じた宇宙ではなくなっていく。それまで神の属性としてしか思考され得なかった「無限」が脱神学化し、目前の茫漠たる空間、あるいは自然として、現に人間に与えられるのである。人間が「自然の支配者にして所有者」（デカルト『方法序説』*8）たらんと昂然と言い放つ一方、「無限の空間の永遠の沈黙」（パスカル『パンセ』*9）が人間を震撼させるであろう、その時が訪れる *10。

円錐と平面の交わりである円錐曲線は、こうしてデザルグの時代にあって、一方で数学ないし自然学という理論知、他方で透視図法という実践知の交錯する、そしてその背後には宇宙の無限という革新的な世界観を秘めた、最先端の知の沸き立つ場なのだった。アルベルティ以降、ピエロ・デッラ・フランチェスカ『絵画の透視図法』（1460 年代）*11 からシモン・ステヴィン『透視図法論』（1605 年）とその仏語訳（1634

---

*8. « [...] nous rendre comme maître et possesseur de la nature. » AT, t.VI, p.62.

*9. « Le silence éternel de ces espaces infinis nous effraie. » Blaise Pascal, *Pensées*, éd. par Philippe Sellier, Bordas, 1991, fragment 233.

*10. Erwin Panofsky, *Die Perspektive als symbolische Form*, Warburg, 1924-25 ; 木田元監訳『象徴形式としての遠近法』ちくま学芸文庫、2009 年、Alexandre Koyré, *From the closed world to the infinite universe*, John Hopkins Press, 1957 ; *Du monde clos à l'univers infini*, trad. par R. Tarr, Gallimard, 1957 などを参照。

*11. Piero della Francesca, *De prospectiva pingendi*.

年）[*12]に至るまで、透視図法に関する理論書が相次いで刊行される[*13]。単に手工技芸としてしか見なされていない絵画を、算術・幾何学・天文学・音楽と並ぶ、より高貴な自由技芸の域に高めようとするこうした努力は、知の世俗化、あるいは高級職人層の知識世界への参入という、ルネサンスから近代にかけて顕著な時代潮流を如実に示している[*14]。幾何学の確固たる知識に基づく職工の技芸の改善に熱心だったデザルグは1648年、弟子の銅版画師アブラアム・ボスが師の説を普及するために著した書物[*15]への「認証」として

> 諸技芸の実践の大部分が、確実な基礎として、幾何学に基づいていることに私は気付いた。[...] だが、それら諸技芸の従事者たちは、実に数多くの教えを頭に詰め込まれ、そうした教えは、その本性と条件からして彼らの理解力を信じ難いほど混乱させ、作業の実行を手早くさせるどころか、かえって時間を浪費させていたのである。ことに人間精神による素晴らしい発明である絵画においてそうであり、画家やその他の職人たちは、いわば偶然任せ、手探りで作業していたのである。そこには的確な導きがなく、従ってその不確かさや疲労は想像を絶するほどだった。そうした辛く、多くは報われることのない労苦から、私に可能なら、いささかとも彼らを救いたいという思いに駆られて、諸技芸の簡潔な規則を私は探求し、発表したのである[*16]。

---

*12. Simon Stevin, *De perspectivis*, 1605.

*13. ジャン・ペルラン『人為的遠近法』（Jean Pélerin, *De artificiali perspectiva*, 1505）、コンマンディーノによるプトレマイオス『平面天球図』注解（Claudius Ptolemaeus, *Planisphaerium*, 1558）、ダニエレ・バルバロ『透視図法の実践』（Daniele Barbaro, *La pratica pella perspettiva*, 1569）、ジャコポ・バロッツィ・ダ・ヴィニョーラ『実践的透視図法の二つの規則』（Jacopo Barozzi da Vignola, *Le due Regole della prospettiva pratica*, 1583）、グィドバルド・デル・モンテ『透視図法六巻』（Guidobaldo del Monte, *Perspectivae librii sex*, 1600）など。Judith Field and Jeremy Gray, *The geometrical work of Girard Desargues*, Springer-Verlag, 1987, p.14-30 を参照。

*14. 佐々木力『数学史』岩波書店、2010年、p.368-370を参照。

*15. Abraham Bosse, *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective par petit pied comme le géométral, ensemble les places et propositions des fortes et faibles touches, teintes ou couleurs*, Paris, 1648.

*16. « [...] et m'étant aperçu qu'une bonne partie d'entre les pratiques des arts est fondée en la géométrie ainsi qu'en une base assurée ; [...] je m'aperçu que ceux qui s'y adonnent avaient à se charger l'esprit d'un grand nombre de leçons diverses pour chacune d'elles ; et qui par leur nature et condition produisaient un embarras incroyable de leur entendement, et loin de leur faire avoir de la diligence à l'exécution de l'ouvrage, leur y faisait perdre du temps, surtout en celle de la pourtraiture, si belle et si estimable entre les inventions de l'esprit humain, où la plupart des peintres et autres ouvriers travaillaient, comme à l'aventure et en tâtonnant : sans guide ou conduite assurée, et par conséquent avec une incertitude et fatigue inimaginable. Le désir et l'affection de les soulager si je pouvais aucunement de cette peine, si laborieuse et souvent ingrage, me fit

と述べている。ここまで幾度となく名を挙げたデカルトもまた、数学の確実性を模範として「根が形而上学、幹が自然学、その幹から出る枝が医学・機械学・道徳という主要三部門に帰着するその他の諸学問」(『哲学の原理』) *17 であるような普遍学を構想し、そのような学を手段として「人間を自然の支配者にして所有者とする」ことを目論む人物であり、後世における命運の対照はさておき、二つの新たな幾何学の創始者同士の共感は必然的だった *18。

第2節 「巻き込み」と無限

デカルトの『方法序説』付論である『幾何学』(1637 年) に応えるように、1639 年、『円錐の平面との交わりの事象生起到達計画草稿 *19』(以下『計画草稿』と略記) という異様な題名の文書が、50 部の印刷物としてパリの数学界に流布する。これこそ、デザルグの主著となる円錐曲線論に他ならない。1950 年、フランス国立図書館で偶然発見された、現存ではただ一部の原版では、横 19 センチ、縦 26 センチの紙面 30 ページに、各ページ約 60 行、章立てもなく稠密に文字が詰め込まれており、別

---

chercher et publier des règles abrégées de chacun de ces arts. » Pou., t.I, p.487-488.

*17. « Ainsi toute la philosophie est comme un arbre, dont les racines sont la métaphysique, le tronc est la physique, et les branches qui sortent de ce tronc sont toutes les autres sciences, qui se réduisent à trois principales, à savoir la médecine, la mécanique et la morale. » AT, t.IX-2, p.14.

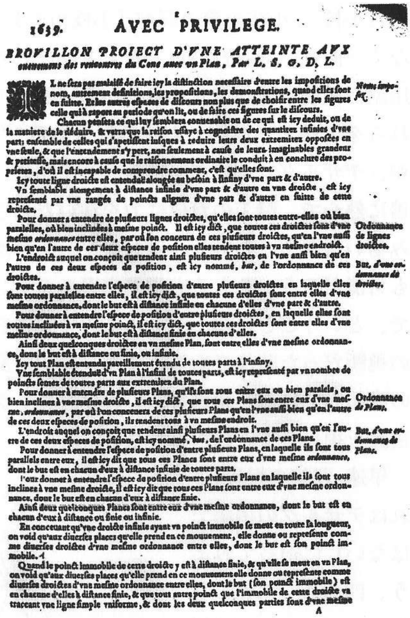
*18. 「デザルグ氏は、デカルト氏が生涯の交際を自らの務めとした人々の一人である。生まれはリヨンで、当時からその才徳で際立っていた。数学、特に自然学について自らの持つ知識を世の無駄にしないために、数々の巧みな考案により、職人の作業の労苦を軽減することに心を砕いていた。デカルト氏もまた、人々の労働を縮め、和らげるため、自然学を完成する手段に思いを巡らせていただけに、デザルグ氏はデカルト氏の一層の評価と友情を集めることとなった。デザルグ氏はデカルト氏をリシュリュー枢機卿に知らしめるため、率先して労をとった。枢機卿との関係から利益を得るなど思いの外だったとはいえ、デザルグ氏がデカルト氏の役に立とうとして見せる熱意に、デカルト氏は感謝せずにはおかなかった。」« M. Desargues fut l'un de ceux qu'il se fit un devoir de converser toute sa vie. Il était lyonnais de naissance ; se faisait distinguer dès lors par son mérite personnel ; et pour ne rendre pas inutile au public la connaissance qu'il avait des mathématiques et particulièrement de la mécanique, il employait particulièrement ses soins à soulager les travaux des artisans par la subtilité de ses inventions. En quoi il s'attira d'autant plus l'estime et l'amitié de M. Descartes, que de son côté il songeait déjà au moyen de perfectionner la mécanique pour abréger et adoucir les travaux des hommes. Ce fut M. Desargues qui contribua principalement à le faire connaître au cardinal de Richelieu et quoique M. Descartes ne prétendit tirer aucun avantage de cette connaissance, il ne laissa pas de se reconnaître très obligé au zèle que M. Desargues faisait paraître pour le servir. » Baillet, *op. cit.*, t.I, p.143.

*19. Girard Desargues, *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, Paris, 1639 (以下 BP と略記) ; *Œuvres de Desargues*, 2 vol., éd. par Noël-Germinal Poudra, Leiber, 1864 ; rééd. fac-similé, Cambridge University Press, 2011 (以下 Pou. と略記), t.I, p.103-230 ; René Taton, *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, PUF, 1951 ; 2e éd., Vrin, 1988 (以下 Tat. と略記), p.99-184.

紙だったと予想される図版は、現時点では依然見出されていない[*20]。文書の最後は「L.S.D.」と閉じられるが[*21]、これは「デザルグ氏（Le Sieur Desargues）」とも「神に讃えあれ（Loué Soit Dieu）」とも読める。

題名に劣らず、書き出しも挑発的である。

> ここで演繹されること、またその演繹の仕方から、各人は適当と思われることを考え、そして以下のことを見て取るだろう。すなわち理性は、一方で無限量を、またその相反する二つの両端がただ一つの量になるまで小さくなっていくような量を知ろうと努める。そして知力は道を失うが、それは、それらの量の想像を絶する大きさや小ささのためだけでなく、理性の通常の用方では、それらの量がいかなるものか把握するのが不可能であるような性質を結論付けなくてはならなくなるためである[*22]。



1639. AVEC PRIVILEGE.

BROVILLON PROIECT D'VNE ATTEINTE AVX euenemens des rencontres du Cone auec vn Plan, Par L. S. G. D. L.

Il ne sera pas malaisé de faire icy la distinction necessaire d'entre les impositions de nom, autrement definitions, les propositions, les demonstrations, quand elles sont en suitte. Et les autres especes de discours non plus que de choisir entre les figures celle qui à rapport au periode qu'on lit, ou de faire ces figures sur le discours. — Noms imposez.

Chacun pensera ce qui luy semblera conuenable ou de ce qui est icy deduit, ou de la maniere de le déduire, & verra que la raison essaye à cognoistre des quantitez infinies d'vne part: ensemble de celles qui s'apetissent iusques à reduire leurs deux extremitez opposées en vne seule, & que l'entendement s'y pert, non seulement à cause de leurs imaginables grandeur & petitesse, mais encore à cause que le raisonnement ordinaire le conduit à en conclure des proprietez, d'où il est incapable de comprendre comment, c'est qu'elles sont.

Icy toute ligne droicte est entendüe alongée au besoin à l'infiny d'vne part & d'autre.

Vn semblable alongement à distance infinie d'vne part & d'autre en vne droicte, est icy representé par vne rangée de poincts alignez d'vne part & d'autre en suitte de cette droicte.

Pour donner à entendre de plusieurs lignes droictes, qu'elles sont toutes entre-elles où bien paralelles, où bien inclinées à mesme poinct. Il est icy dict, que toutes ces droictes sont d'vne mesme *ordonnance* entre elles, par où l'on conceura de ces plusieurs droictes, qu'en l'vne aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position elles tendent toutes à vn mesme endroict. — Ordonnance de lignes droictes.

L'endroict auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droictes en l'vne aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, est icy nommé, *but*, de l'ordonnance de ces droictes. — But, *d'vne ordonnance de droictes.*

Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs droictes en laquelle elles sont toutes paralelles entre elles, il est icy dict, que toutes ces droictes sont entre elles d'vne mesme ordonnance, dont le but est à distance infinie en chacune d'elles d'vne part & d'autre.

Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs droictes, en laquelle elles sont toutes inclinées à vn mesme poinct, il est icy dict, que toutes ces droictes sont entre elles d'vne mesme ordonnance, dont le but est à distance finie en chacune d'elles.

Ainsi deux quelconques droictes en vn mesme Plan, sont entre elles d'vne mesme ordonnance, dont le but est à distance ou finie, ou infinie.

Icy tout Plan est entendu pareillement étendu de toutes parts à l'infiny.

Vne semblable étendüe d'vn Plan à l'infini de toutes parts, est icy representé par vn nombre de poincts semez de toutes parts aux extremitez du Plan.

Pour donner à entendre de plusieurs Plans, qu'ils sont tous entre eux ou bien paralels, ou bien inclinez à vne mesme droicte, il est icy dict, que tous ces Plans sont entre eux d'vne mesme, *ordonnance*, par où l'on conceuera de ces plusieurs Plans qu'en l'vne aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, ils tendent tous à vn mesme endroit. — Ordonnance *de Plans.*

L'endroit auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs Plans en l'vne aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, est icy nommé, *but*, de l'ordonnance de ces Plans. — But, *d'vne ordonnance de Plans.*

Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs Plans, en laquelle ils sont tous parallels entre eux, il est icy dit que tous ces Planes sont entre eux d'vne mesme *ordonnance*, dont le but est en chacun d'eux à distance infinie de toutes parts.

Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs Plans en laquelle ils sont tous inclinez à vne mesme droicte, il est icy dit que tous ces Plans sont entre eux d'vne mesme ordonnance, dont le but est en chacun d'eux à distance finie.

Ainsi deux quelconques Planes sont entre eux d'vne mesme ordonnance, dont le but est en chacun d'eux à distance ou finie ou infinie.

En conceuant qu'vne droicte infinie ayant vn poinct immobile se meut en toute sa longueur, on void qu'aux diuerses places qu'elle prend en ce mouuement, elle donne ou represente comme diuerses droictes d'vne mesme ordonnance entre elles, dont le but est son poinct immobile.

Quand le poinct immobile de cette droicte y est à distance finie, & qu'elle se meut en vn Plan, on void qu'aux diuerses places qu'elle prend en ce mouuement elle donne ou represente comme diuerses droictes d'vne mesme ordonnance entre elles, dont le but (son poinct immobile) est en chacune d'elles à distance finie, & que tout autre poinct que l'immobile de cette droicte va traceant vne ligne simple vniforme, & dont les deux quelconques parties sont d'vne mesme

A

図4　『計画草稿』（1639年）

*20. 発見の経緯は René Taton, « Découverte d'un exemplaire original du *Brouillon project* sur les coniques de Desargues », *Revue de l'histoire des sciences et de leurs applications*, CAPHES, Paris (以下 RHS と略記), IV-2, 1951, p.176-181 に詳しい。この 1639 年版は現在、フランス国立図書館 Web サイト « Gallica » で閲覧可能である。

*21. BP, p.30 ; Pou., t.I, p.230 ; Tat., p.184.

*22. « Chacun pensera ce qui lui semblera convenable, ou de ce qui est ici déduit, ou de la manière de le déduire ; et verra que la raison essaie à connaître des quantités infinies d'une part, ensemble de celles qui s'apetissent jusques à réduire leurs deux extrémités opposées en une seule, que l'entendement s'y perd, non seulement à cause de leurs imaginables grandeur et petitesse, mais encore à cause que le raisonnement ordinaire le conduit à en conclure des propriétés, d'où il est incapable de comprendre comment c'est qu'elles sont. » BP, p.1 ; Pou., t.I, p.103-104 ; Tat. p.99. 実際にはこの前に、印刷の体裁に関する注記が置かれている。

本稿の主題である「無限」概念については然るべき折に論じることとして、続いては術語の定義であるが、これも数学文書とは思えないものばかりである。例えば考察の主眼となる直線が「幹」、幹と交わる別の直線が「小枝」、幹と小枝の交点が「節」、平行な小枝が「真直ぐな小枝」、交わる小枝が「広がった小枝」、幹の節の間が「畳まれた小枝」、小枝の節の間が「小枝の若芽」、等々となるが[*23]、これらは通常特に区別なく「直線」「線分」「点」などと呼ばれるものに他ならない。このようにデザルグの用語は植物を連想させるものが多いが、他にも円錐を「角笛」、円柱を「柱」、またこれらを併せて「巻物」とする例もある[*24]。自説の革新性を演出する虚飾とも取れるが、デザルグは一方で、透視図法を始め、幾何学の確固たる知識に基づく実践知の改善に熱心で、職工の育成に力を注いだとされる人物でもある。学識の無い者にも親しみ易い言葉を、という心優しさを、それが成功したか否かはさておき、見届けることも可能だろう。そもそも学術文書をラテン語ではなく、民衆の言葉であるフランス語で、ということ自体、デカルトの『方法叙説』についてよく述べられるように、一つの勇断だった時代である。また、時代の風潮ということで言えば、具象的でイメージの喚起力に富む、過剰な、いわばバロック的な修辞も、デザルグにあって、論理の厳密性を損なうことは決してない。

早速、理論の根幹(これはデザルグの用語ではない)に迫ってみよう。四角形 $PQRS$ を考え、そのうち相対する二組の辺、PQ と RS、PS と QR をそれぞれ l と l'、m と m' とし、対角線の組 PR と QS を n と n' とする。このように四個の点と、そこから派生する六本の直線から成る図形を、今日の幾何学では一般に「完全四角形」というが、デ

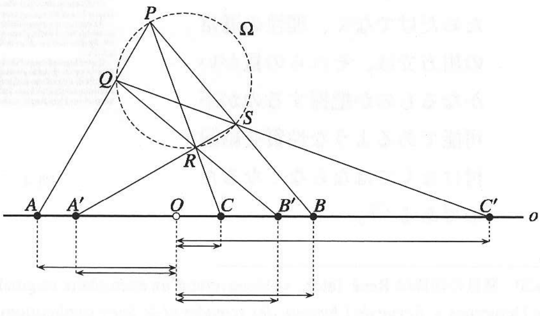


図 5 完全四角形点列と「木」

*23. 原語はそれぞれ tronc ; rameau ; nœud ; rameaux droits ; rameau déployé / plié au tronc ; brin de rameau. BP, p.2 ; Pou., t.I, p.108 ; Tat., p.102.

*24. 原語はそれぞれ cornet / colonne / rouleau. BP, p.14 ; Pou., t.I, p.158-159 ; Tat., p.133-134.

ザルグは前者の点を「境界」、後者の直線を「境界直線」と呼ぶ *25。

いま、これら六本の直線 l, l', m, m', n, n' と、それ以外の任意の直線 o との交点を、それぞれ A, A', B, B', C, C' とする。こうして完全四角形とそれに属さない一本の直線により定められた六個の点の集合を「完全四角形点列」と呼ぶことにして、このような点列に対し、線分の長さに関する等式

$$OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC' \tag{1}$$

を満たす直線 o 上の点 O が、証明は割愛するが、必ずただ一つ存在する。ここで、完全四角形に関する以上の前提は言外に想定されているとして、(1) の状況を、デザルグは「木」と呼ぶ。

> 直線 OA 上に点 O があり、二個の線分の三個の対 OA と OA', OB と OB', OC と OC' に O が共通で、どの線分の対についても O が同様に挟まれているかはみ出ているかのどちらかであり、線分の対の三個の長方形（二本の線分の長さの積のこと。訳者注）がどれも互いに等しいとき、直線におけるこのような条件を、ここでは「木」と名付ける。その直線自体は幹である。六本の線分 $OA, OA', OB, OB', OC, OC'$ に共通な点 O を「株」と名付ける。六本の線分 $OA, OA', OB, OB', OC, OC'$ のそれぞれを「大枝」と名付ける *26。

デザルグは「木」の状況から、比例関係に基づく精妙な推論という、いかにもギリシャ数学的な手法により

$$\frac{AB \times AB'}{A'B \times A'B'} = \frac{AC \times AC'}{A'C \times A'C'} \tag{2}$$

という美しい関係を導き、これを樹木の枝の錯綜を思わせる「巻き込み」という語で表す *27。立体の幾何学に精通していたデザルグは、この「巻き込み」が射影において不変であることを知っていた。すなわち、直線 o に含まれない任意の点と $A, A', B,$

---

*25. 原語はそれぞれ borne ; bornale droite. BP, p.2 ; Pou., t.I, p.111 ; Tat., p.104.

*26. « Quand en une droite *AH* il y a un point *A* commun et semblablement engagé ou dégagé aux deux pièces de chacune de trois couples *AB*, *AH* ; *AC*, *AG* ; *AD*, *AF*, dont les trois rectangles sont égaux entre eux, une telle condition en une droite est ici nommée *arbre*, dont la droite même est *tronc*. Le point commun *A*, ainsi commun à chacune de ces six pièces *AB*, *AH* ; *AC*, *AG* ; *AD*, *AF*, y est nommé *souche*. Chacune des mêmes six pièces *AB*, *AH* ; *AC*, *AG* ; *AD*, *AF* est nommée *branche*. » 和訳では見やすさを考え、記号を改めた。「木」「株」「大枝」の原語はそれぞれ arbre ; souche ; branche. BP, p.3 ; Pou., t.I, p.112 ; Tat. p.105-106.

*27. 原語は involution. BP, p.4 ; Pou., t.I, p.119 ; Tat. p.110. デザルグがここで用いるのはユークリッド『原論』第 5 巻命題 19、すなわち

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} \tag{*}$$

B', C, C' のそれぞれとを結ぶ六本の直線の束を、o と異なる直線 $o_\#$ で切断して得られる六個の点を $A_\#, A_\#', B_\#, B_\#', C_\#, C_\#'$ とすれば、ここでも「巻き込み」

$$\frac{A_\# B_\# \times A_\# B_\#'}{A_\#' B_\# \times A_\#' B_\#'} = \frac{A_\# C_\# \times A_\# C_\#'}{A_\#' C_\# \times A_\#' C_\#'} \tag{$2_\#$}$$

が成り立つのである。ここで、ある円周 Ω が与えられたとして、完全四角形の四個の頂点 P, Q, R, S が Ω 上にあるとしよう。点 P, Q, R, S と直線 o の取り方次第で、円に関する様々な状況が「巻き込み」の値として表現される。射影の操作で Ω を任意の円錐曲線 $\Omega_\#$ に変形させても、変形後の完全四辺形 $P_\# Q_\# R_\# S_\#$ と直線 $o_\#$ との関係は、「巻き込み」の観点に立てば、元の $PQRS$ と o との関係と全く同じである。これは、円について証明された諸性質が「巻き込み」を介して、任意の円錐直線に関して成り立つものとして一般化されることを意味し、こうして射影原理に基づく統一的な円錐曲線論の根拠が得られたことになる。

ちなみに、デザルグが鋳造した数十もの新語のうち、数学の術語として後世まで唯一生き残ったのが、ここまで「巻き込み」と訳してきた involution の語である。19 世紀ドイツにおける射影幾何学発展の立役者、フォン・シュタウトは、直線 o 上の完全四角形点列 A, A', B, B', C, C' に関して、射影と切断の操作を適当に組み合わせたある操作 f が存在して、

$$f(A) = A', \quad f(A') = A, \quad f(B) = B', \quad f(B') = B, \quad f(C) = C', \quad f(C') = C$$

のように、f が点列の対を成す二個の点の位置を交換すること、更に o 上の任意の点 X にこの f を続けて二回適用すれば、X が元の位置に戻ること、すなわち $f^2(X) = X$

という比例関係である。$OA \times OA' = OB \times OB'$ を

$$\frac{OB}{OA'} = \frac{OA}{OB'}, \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$$

と書き換えると、$(*)$ によりそれぞれ

$$\frac{OB}{OA'} = \frac{OB - OA}{OA' - OB'} = -\frac{AB}{A'B'}, \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OA - OB'}{OB - OA'} = -\frac{AB'}{A'B}$$

が導かれ、辺々掛けて

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB \times AB'}{A'B \times A'B'}$$

同様に $OA \times OA' = OC \times OC'$ から

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AC \times AC'}{A'C \times A'C'}$$

となり、結論 (2) を得る。

であることを示した[*28]。こうして、involution は一般に「任意の要素が二回の適用で元に戻るような操作」（例えば、任意の数に -1 を掛けること、0 でない任意の数の逆数を取ること、任意の図形を点対称または線対称移動することなど）を表す術語となり、その意味で「対合」と和訳されるのが通例であるが[*29]、そこから involution という語の、元の植物的な含みを感知するのは不可能であろう。いずれにせよ、デザルグの「巻き込み」に含まれていた「線分の長さ」という計量幾何学の残滓は、フォン・シュタウトの再定義において、完全に払拭されることになる。

『計画草稿』に戻ろう。直線 o 上の完全四角形点列のうち、特に A' が A と、B' が B と一致しているものは「調和点列」と呼ばれ、例えば C と C' が同じ比で AB を内分または外分するなど、顕著な性質が古来知られていた。この場合、「木」の定義 (1) は

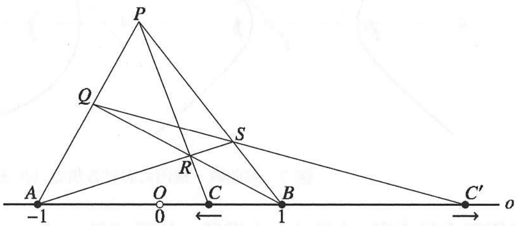


図 6　調和点列における「木」と無限

$$OA^2 = OB^2 = OC \times OC' \qquad (1')$$

となり、O は A と B の双方から等距離なので、適当な数直線を取り、$A = -1$, $O = 0$, $B = 1$ とおく。その数直線上で、C を動かしてみよう。(1′) の関係により、C が O に近付く程、C' は O から遠ざかる。では、C を O に一致させた場合、すなわち $OC = 0$ となる極限的な場合、C' はどうなるのか。四則演算の通常の規則では、(1′) は

$$1 = 1 = 0$$

となるが、これは明らかに不合理である。こうしてデザルグが『計画草稿』冒頭で喚起した「無限」の問題が姿を現す。念のため、その言葉にもう一度耳を傾けよう。括弧内の補足は訳者による。

---

*28. Harold Scott MacDonald Coxeter, *Projective Geometry*, second edition, Springer-Verlag, 1987, p.45.

*29. 「対合　involution「たいごう」または「ついごう」と読む。集合 X 上の全単射の変換 T が $T^2 = I$（I は恒等変換）を満たすとき、T を対合という。また x と Tx は対合的であるという。」青木和彦他編『岩波数学入門辞典』岩波書店、2005 年、p.362。

理性は、一方で無限量（OC'）を、またその相反する二つの両端がただ一つの量になるまで小さくなっていくような量（OC）を知ろうと努める。そして知力は道を失うが、それは、それらの量の想像を絶する大きさや小ささのためだけでなく、理性の通常の用方では、それらの量がいかなるものか把握するのが不可能であるような性質を結論付けなくてはならなくなるためである。

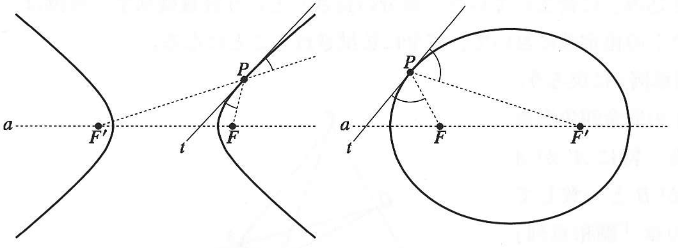


図 7　双曲線・楕円における焦点（F と F'）

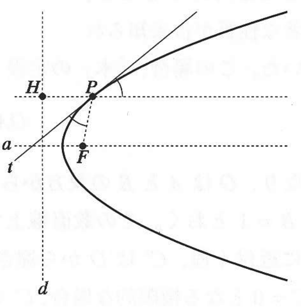


図 8　放物線における焦点（F）

無限概念は古来、「ゼノンの逆理」(「飛ぶ矢はどこにも届かない」など）のように解決不能な難問を呈するものとして、学問上の忌避の対象であり続けた。その封印をヨーロッパの数学者として始めて本格的に解いたのが、デザルグの活躍にやや先立つ 17 世紀初頭、天体観測の必要から、屈折や反射という光学の問題に取り組んでいたヨハンネス・ケプラーである（『ヴィテリオへの序論、光学の天文学部門 *30』、1604 年）。伝統的な計量幾何学によれば、楕円または双曲線は「与えられた二点 F, F' からの距離の和または差が一定である点 P の軌跡」(図 7 で $FP+F'P$（楕円）または $|FP-F'P|$（双曲線）が定数)、放物線は「与えられた点 F からの距離と与えられた直線 d からの距離が等しい点 P の軌跡」(図 8 で $FP = PH$）として定義される。ここで必要と

---

*30. Johannes Kepler, *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur*, Frankfurt, 1604. 以下、ケプラーに関する記述は主に Judith Field, « The infinitely great and the infinitely small in the work of Girard Desargues », DST, p.219-230 による。ヴィテリオは 13 世紀シレジアの学僧で、光学に関する『視覚論』 *De Perspectiva* を残している。

される定点の数は、一方では二個、他方では一個である。同じ円錐面の切断による曲線でありながら、この相違はどこに由来するのか。ケプラーがその謎に迫った手掛かりは、楕円面鏡と放物線面鏡における反射の現象にある。

楕円や双曲線のような曲線上の点を P、P における曲線の接線を t とすれば、t と FP の成す角と、$F'P$ と t の成す角は等しい。この幾何学的な命題は、光学の言葉に翻訳すれば、F を発して楕円面で反射された光線は必ず F' を通り、逆に F' を発して楕円面で反射された光線は必ず F を通ることを意味する（図 7）。他方、放物線上の点を P、P における放物線の接線を t とすれば、t と FP の成す角と、P を通り放物線の軸 a と平行な直線 HP と t の成す角は等しい。こちらは光学的には、F を発して放物線面で反射された光線は全て a と平行な光束となり、逆に a と平行な光束は放物線面で反射されて全て F に集まることを意味する（図 8)。このような性質から、F（や F'）は円錐曲線の「焦点」と呼ばれる。

楕円や双曲線が二個の焦点を持つのに対し、放物線が焦点を一個しか持たないのはなぜか。その問いへのケプラーの答えは意表を付き、かつ美しい。すなわち、放物線も二個の焦点を持つのである。実際、楕円や双曲線の二個の焦点 F と F' を次第に遠ざけてみよう。F と F' の距離が大きくなる程、直線 $F'P$ と軸 a の成す角は次第に小さくなり、両者は平行に近付いていく。FF' が無限遠であるような極限を仮定すれば、$F'P$ と a はその極限において、完全に平行となるだろう。この極限状態における曲線こそ、放物線に他ならない（図 8 では $F'P = HP$)。双曲線から考えれば、放物線の第二の焦点 F' は a 軸の負方向の無限遠に位置し、楕円から考えれば、放物線の第二の焦点 F' は a 軸の正方向の無限遠に位置することになる。このように無限概念を介することで、焦点について、楕円・放物線・双曲線の連続的変化が保証されるが、これは平面による円錐の切断線としての、三種類の曲線の連続性（すなわち、同じ円錐を様々に異なる平面で切断すれば、その角度に応じて三種類の曲線のいずれかが現れること）ともよく符合する。

無限遠あるいは無限大に続き、ケプラーは更に、惑星の軌道計算に取り組む中で、無限小の概念を見出すことになる（『新天文学 *31』、1609 年)。ケプラーのこの発見は、特にガリレオの弟子、ボナヴェントゥーラ・カヴァリエリに継承され、デザルグの活躍とほぼ同時期の 1635 年、その『連続体の不可分量を通じた新方法により展開

*31. Johannes Kepler, *Astronomia nova*, Heiderburg, 1609.

された幾何学[32]』において華々しい成果を見ることになるが、「不可分量」、すなわち無限小は寧ろ微積分学の源流にあり、『計画草稿』においては副次的な役割しか果たさないため、詳しい検討は別の機会に譲りたい。

デザルグへの「木」に戻ると、$OC \times OC' = 1$ かつ $OC = 0$ のとき、C' はどうなっているのか、というのが問題なのだった。『計画草稿』の言葉を追ってみよう。以下、括弧内は全て訳者による補足と考えられたい。最初は $0 < OC < 1$ の場合である。

> 外項的な大枝の対（OC と OC'）のうち小さい方（OC）が内項的な大枝（OA または OB）の一つより短ければそれだけ、その外項的な大枝の対のうち大きい方（OC'）は、同じ内項的な大枝に比べて一層長くなる。またその逆も真である。あるいは外項的な節の対（C と C'）のうち内側の節（C）が株（O）に近ければそれだけ、同じ外項的な節の対のうち外側の節（C'）は同じ株（O）から遠ざかる。またその逆も真である。こうして外項的な対の内側の節（C）が木の株（O）と一致していないとき、同じ対の外側の節（C'）は節から有限な距離にある。またその逆も真である[33]。

そしていよいよ $OC = 0$ の場合が述べられる。

> また外項的な対の内側の節（C）が木の株（O）と一致しているとき、同じ対の外側の節（C'）は節から無限な距離にある。またその逆も真である。従って木において株、また同じ株から一方または他方に無限にとられた幹は、互いに外項的な大枝の対を成す。その小さい方は株に至る小ささで、大きい方は無限に延長される。従って同じ株と無限の距離とはまた、木において外項的な節の対を成し、株はその内側の項（C）、無限の距離はその外側の項（C'）となる。またその対は他の任意の異なる大枝の対と共に巻き込みを構成する[34]。

---

*32. Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuonum nova quadam ratione promota*, Bologna, 1635.

*33. « [...] d'autant que la petite d'une couple de branches extrêmes est plus courte qu'une des branches moyennes, d'autant la grande de cette couple de branches extrêmes est à proportion plus longue que la même branche moyenne. Et au rebours. Ou bien d'autant plus que le nœud intérieur B d'une couple de nœuds extrêmes BH est proche de la souche A, d'autant plus le nœud extérieur H de la même couple de nœuds extrêmes BH est éloigné de la même souche A. Et au rebours. Ou bien d'autant plus que le nœud intérieur B d'une couple de nœuds extrêmes BH est proche de la souche A, d'autant plus le nœud extérieur H de la même couple de nœuds extrêmes BH est éloigné de la même souche A. Et au rebours. Ainsi pendant que le nœud intérieur B d'une couple d'extrêmes est disjoint ou désuni à la souche de l'arbre, le nœud extérieur de la même couple est au tronc à distance finie. Et au rebours. » BP, p.6 ; Pou., t.I, p.126-127 ; Tat. p.114-115.

*34. « Et quand le nœud intérieur B d'une couple d'extrêmes est joint ou bien uni à la souche de l'arbre,

要約すれば、0 でない数 a とその逆数 $1/a$ が対を成すのと全く同じように、0 と無限大 ∞ は対を成す。直接の影響の有無はさておき、無限大を通常の数ないし数直線上の点と全く同様に扱うという点で、デザルグがケプラーの思考圏内にあるのは明らかであるが、その印象は、以上の考察を締め括る次の言葉で更に強められる。

> このような種類の木の形状は、ある種の相互位置に置かれた円錐と平面との交わりに由来する図形において頻繁に生起する[*35]。

ここで述べられた「図形」が二焦点間の距離が無限大である円錐曲線、すなわち放物線であることは言うまでもない。

ちなみに、こうして見出された新たな概念について、デザルグは『計画草稿』への補遺において、アリストテレス的・スコラ哲学的な用語を交えて

> 幾何学においては、諸量について、それらが存在しているのが実際に現勢的なのか、それとも単に潜勢的に過ぎないかを区別して推論されることはなく、また自然の事物一般について、知力が理解できないような何かが自然の中に存在するのかを決定した上で推論されることもない[*36]。

と記している。自然における無限大の実在を認めるとは、当時の社会的文脈では、地動説に与することに他ならない。ガリレオ裁判が学界を震撼させていた時代にあって、デザルグも無限という魅力的な難問に取り組むに当たり、相応の配慮を余儀なくされていたことが窺われる。

無限大を少なくとも理念的実在として認めた場合、『計画草稿』冒頭に続いて示される「直線のまとまり」、すなわち今日の射影幾何学でいう「線束」の概念も、以上の議論から自然に了解されよう。

> 複数の直線について、それらが互いに平行であること、あるいは同一の点へと傾いていることを示すために、ここでは、それらの直線は互いに同一の「ま

---

le nœud extérieur de la même couple est au tronc à distance infinie. Et au rebours. Voilà comme en un arbre la souche, et le tronc depuis la même souche jusqu'à l'infini d'une ou d'autre part d'elle, sont entre eux une couple de branches extrêmes, dont la petite est à petitesse jusqu'à la souche, et la grande est alongée à l'infini. Voilà de plus comme la même souche et la distance infinie sont encore en arbre une couple de nœuds extrêmes, dont la souche est l'intérieur, et la distance infinie est l'extérieur, et qui avec deux quelconques autres diverses couples de branches constituent une involution. » *Ibid.*

*35. « Or l'événement de semblables espèces de conformation d'arbre est fréquent aux figures qui viennent de la rencontre d'un cône avec des plans en certaine disposition entre eux. » *Ibid.*

*36. « En géométrie on ne raisonne point des quantités avec cette distinction, qu'elles existent ou bien effectivement en acte, ou bien seulement en puissance, ni du général de la nature avec cette décision, qu'il n'y ait rien en elle en elle que l'entendement ne comprenne. » *Avertissement* au BP, 3e page.

とまり」に属するという。これにより、その二種類の位置の一方また他方において、それら複数の直線が全て同じ場所に向かっていることが解されよう。その二種類の位置の一方また他方において、それら複数の直線が向かっていると解される場所を、ここでは、それらの直線のまとまりの「目的」と名付ける。

複数の直線が全て互いに平行であるような直線間の位置の種類を示すために、ここでは、それら複数の直線は互いに同一のまとまりに属し、その目的は、それらの直線のそれぞれにおいて、一方また他方に、無限の距離にあるという。

複数の直線が全て同一の点へと傾いているような直線間の位置の種類を示すために、ここでは、それら複数の直線は互いに同一のまとまりに属し、その目的は、それらの直線のそれぞれにおいて、有限の距離にあるという。

こうして、同一平面上の任意の二本の直線は互いに同一のまとまりに属し、その目的は有限または無限の距離にある *37。

ユークリッド幾何学の枠内では、二本の直線が交わるのと平行であるのとは、二つの全く異なる事態として質的に峻別されるが、デザルグにとって、その違いは単に、交点が有限の範囲内にあるか、無限遠にあるかという量的な区別でしかない。平行線は交わる。これは逆説でも何でもなく、透視図法における平行線の表象を、新たな理論的構築物の土台として、数学的に鍛え直した陳述に他ならない。こうしてデザルグの踏み出した道の行き着く先を、少しだけ先取りしておこう。平行線の交点を「無限遠点」といい、「無限遠点」同士を結ぶ直線を「無限遠線」という。これらの新たな幾何学的存在は、その理論上の資格において、通常の点や直線と何ら異なるところがない。ユークリッド平面に「無限遠線」(図 2、図 3 における地平線の表象 UV) を加えた「射影平面」が、幾何学の新たな舞台となるだろう。その「射影平面」において

---

*37. « Pour donner à entendre de plusieurs lignes droites qu'elles sont toutes entre elles ou bien paralelles, ou bien inclinées à un même point, il est dit ici que toutes ces droites sont d'une même *ordonnance* entre elles ; par où l'on concevra de ces plusieurs droites qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de positions, elles tendent toutes à un même endroit. L'endroit auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droites en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, est ici nommé *but* de l'ordonnance de ces droites. // Pour donner à entendre l'espèce de position d'entre plusieurs droites en laquelle elles sont toutes paralelles entre elles, il est ici dit que toutes ces droites sont entre elles d'une même ordonnance, dont le but est à distance infinie en chacune d'elles d'une part et d'autre. // Pour donner à entendre l'espèce de position d'entre plusieurs droites en laquelle elles sont toutes inclinées à un même point, il est ici dit que toutes ces droites sont entre elles d'une même ordonnance, dont le but est à distance finie en chacune d'elles. // Ainsi deux quelconques droites en un même plan sont entre elles d'une même ordonnance, dont le but est à distance ou finie, ou infinie. » BP, p. 1, Pou., t.I, p.104-105, Taton, p.100.

は、二つの公理（証明無しに承認されるべき基礎命題）が要請される。第一の公理は、ユークリッド幾何学でお馴染みである。

公理１　任意の二個の異なる点は、ただ一本の直線で結ばれる。

第二の公理が、ユークリッド幾何学と射影幾何学との違いを際立たせる。

公理２　任意の二本の異なる直線は、ただ一個の点で交わる。

公理２の導入の効果は絶大である。第一に、直線が交わる場合と平行である場合との区別は、ユークリッド幾何学において、しばしば議論の錯綜の原因となるが、射影幾何学ではそのような鈍重さが見事に一掃される。例として、次の二つの命題を比較してみよう。

命題１　二個の三角形について、対応する三組の辺がいずれも平行ならば、対応する頂点を結ぶ三本の直線は同一の点を通る。

命題２　二個の三角形について、対応する三組の辺の交わる点がいずれも同一の直線上にあれば、対応する頂点を結ぶ三本の直線は同一の点を通る。

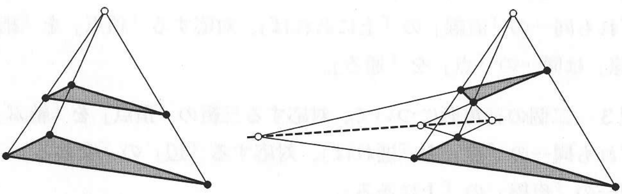


図９　デザルグの定理の二つの場合

これらの命題は、ユークリッド幾何学の範囲では明らかに別の事態を述べているが、射影幾何学の立場からは、命題１の仮定部分は「対応する三組の辺の交わる点がいずれも無限遠線上にあれば」と言い換えられる。すなわち命題１は命題２の特別な場合に過ぎず、更に命題１が証明されれば、その証明は射影の操作により、より一般的な命題２にまで及ぶことになる。ちなみに命題２の逆、すなわち

二個の三角形について、対応する頂点を結ぶ三本の直線が同一の点を通れば、対応する三組の辺の交わる点はいずれも同一の直線上にある。

という命題は、デザルグの弟子ボスの著作（1648 年）が初出であるが、射影幾何学の基本定理として、今日「デザルグの定理」として知られている。

公理２の第二の効果として、二つの公理を見比べると、点と直線に関する両者の完全な対称性に気付かされる。射影幾何学の命題は、この二つの公理から演繹される限り、点と直線に関して完全に対称的である。すなわち以下の言い換えにより、点に関して正しい命題は直線に関して正しい命題となり、逆に、直線に関して正しい命題は点に関して正しい命題となる。この顕著な事実を、射影幾何学の「双対原理」という。

点	$\Longleftrightarrow$	直線
（多角形の）頂点	$\Longleftrightarrow$	（多辺形の）辺
（二本の直線が）交わる	$\Longleftrightarrow$	（二個の点を）結ぶ
（ある直線の）上にある	$\Longleftrightarrow$	（ある点を）通る
（複数の点が）同一の直線上にある	$\Longleftrightarrow$	（複数の直線が）同一の点を通る
⋮		⋮

表１　双対原理

例えば命題２を表に従って翻訳してみよう。

命題２　二個の三角形について、対応する三組の「辺」の「交わる」「点」がいずれも同一の「直線」の「上にあれば」、対応する「頂点」を「結ぶ」三本の「直線」は同一の「点」を「通る」。

命題３　二個の三角形について、対応する三組の「頂点」を「結ぶ」「直線」がいずれも同一の「点」を「通れば」、対応する「辺」の「交わる」三個の「点」は同一の「直線」の「上にある」。

命題３は「デザルグの定理」そのものに他ならない。命題２と命題３は互いの逆、すなわち仮定部分と結論部分が入れ替わっているだけで、その意味で「デザルグの定理」は「自己双対」的である。

もう一つ、やはり射影幾何学の基本定理で、デザルグの薫陶を受けた神童パスカルが1640年、わずか16歳で発表した「パスカルの定理」でも確かめてみよう。

命題４　円錐曲線に「内接」する「六角形」において、相対する「辺」が「交わる」三個の「点」は、同一の「直線」の「上にある」。

命題５　円錐曲線に「外接」する「六辺形」において、相対する「頂点」を「結ぶ」三本の「直線」は、同一の「点」を「通る」。

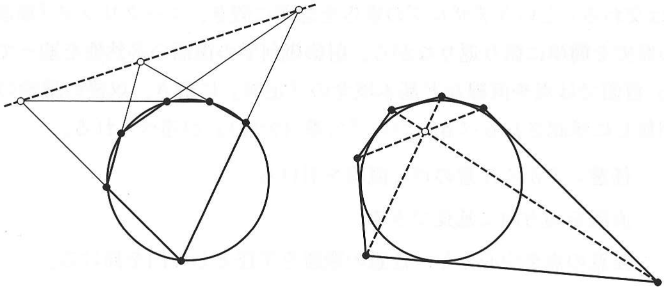


図 10　パスカルの定理とブリアンションの定理

命題 5 は発見者の名に因み「ブリアンションの定理」という。双対原理を知ることなく、二つの命題の一方から他方に思い至れる者が、果たしてどれだけあるだろうか。

ここまで「無限遠 = 無限大」概念の導入が幾何学にもたらす意想外な光景の、その論理的な起源に最も近い一画を、19 世紀以降に加えられた知見も交えて素描してきた。そこから先、『計画草稿』に繰り広げられる世界についての詳述は、その豊穣さに照らして、別の機会を待たなくてはならない。

第 3 節　射影幾何学の射程

外接六辺形定理は 1806 年、エコール・ポリテクニック、すなわちフランス大革命に際し、高級将校・技術者養成機関として設立されたフランスの理工系の最高学府の学生、シャルル・ジュリアン・ブリアンションにより発表された。その双対、内接六角形定理の発表の年、1640 年とを隔てる一世紀半以上もの空白が、デザルグの沈んでいた忘却の深さを、何よりも雄弁に物語っている。

二つの異なる幾何学の創始者、デカルト、そしてデザルグ亡き後、ヨーロッパ近代の数学の舞台前景を占めたのは、疑いもなく前者である。解析幾何学を舞台装置として、ニュートン、ライプニッツ、ベルヌーイ兄弟、オイラー、ダランベール、ラグランジュ、ラプラスと、綺羅星のような名前の連なりの下、微分積分学と古典力学が両輪を為して、人間を「自然の支配者にして所有者」としていく経緯は、近代科学史の華麗な表街道として、改めて述べるまでもない。デカルトの影に蔽われていたデザルグの再発見は、エコール・ポリテクニックの初代数学教官ガスパール・モンジュ、またその薫陶を受け、19 世紀以降、射影幾何学の新境地を拓いたジャン・ヴィクトル・ポンスレやミシェル・シャールらによるところが大きいが、ここでは『計画草稿』冒頭、

「平行線は交わる」というデザルグの宣告を念頭に置き、ユークリッド『原論』以来の幾何学の歴史を簡単に振り返りながら、射影幾何学の復活の必然性を辿ってみよう。

『原論』冒頭では点や直線など基本概念の「定義」に続き、以後の議論の根拠となる、証明無しに承認されるべき五つの『公準（公理）』が述べられる。

1. 任意の点から任意の点に直線を引ける。
2. 直線を両方向に延長できる。
3. 任意の点を中心とし、任意の距離を半径として円を描ける。
4. 全ての直角は互いに等しい。
5. ある直線が他の二直線と交わるとき、同じ側の内角の和を二直角より小さくすれば、この二直線は限りなく延長されると、二直角より小さい角のある側において交わる。

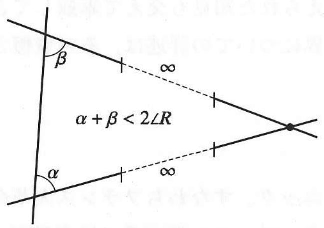


図 11　第五公理

第一公理から第四公理がごく平易なのに比べ、第五公理の異様な難解さが印象的である。これは

5′. 任意の直線 l と、l の上にない任意の点 P について、P を通り l と平行な（これはユークリッド幾何学の範囲では「どこまでも l と交わらない」ことを意味する）直線はただ一本だけ存在する。

という、より理解しやすい命題と論理的に等しいが、それにしても、第一公理から第四公理と異なり、この第五公理だけは経験の範囲で検証されようがない。実際、無限遠の先で二直線が交わるか否か、神ならぬ身、一体誰に見て取れるだろう。

こうして古来、18 世紀末に至るまで、第五公理を公理として認めず、これを単なる定理として他の公理から導く試みが、執拗に繰り返されてきたのだった。それが不可能な試みであること、すなわち第五公理として述べられた命題をユークリッドが公理として採用したのは極めて正当だったことを、時を同じくしてそれぞれ独立に明らかにしたのが、数学の王者フリードリッヒ・ガウス、そして当時無名だった二人の青年、ロシアのニコライ・ロバチェフスキーとハンガリーのボヤイ・ヤーノシュである。彼らの発見からの帰結は極めて逆説的に見える。すなわち

6. P を通り l と平行な直線は複数存在する。

ことも、

7.　Pを通りlと平行な直線は全く存在しない。

ことも共に可能であり、これらの命題のいずれかを公理として採用しても、首尾一貫した無矛盾な幾何学が展開される、というのである。ガウスが「野蛮人どもの喚き声」を恐れて生涯公表を控えていた、この常識から余りに懸け離れた「非ユークリッド幾何学」は、一体何を意味しているのか。

ここで非ユークリッド幾何学が単に荒唐無稽な絵空事とは言い切れないことを納得するために、二人の傑出した数学者、フェリックス・クラインとベルンハルト・リーマンがそれぞれ考案した、二つの有名なモデルを簡単に見ておこう。

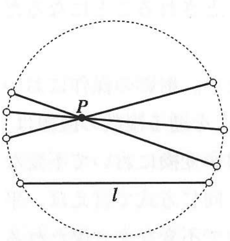


図 12　クラインのモデル

最初にクラインのモデルである。ある円を考え、その円の外部と円周を除外した領域、すなわち円の内部だけを「平面」として定義する。「平面」上の「直線」はユークリッド平面の直線から円外の部分と円周との二個の交点を除いた残りとなるが、このとき「直線」上を円周に向かってどこまで進んでも、決して円周に辿り着くことはないので、「直線」と円周との交点が「無限遠点」、それらの「無限遠点」全てを含む円周が「無限遠線」であると考えられる。ということは、図でPを通っている三本の直線は無限遠の距離でもlと交わっておらず、従っていずれもlと「平行」ということになる。このような「平面」においては、詳細は割愛するが「距離」や「角度」のような計量的概念を定義する適当な手段が存在し、そうすれば平行線公理5が6に置き換えられた、但し他の点ではユークリッド幾何学と全く同等の幾何学が展開される、という訳である。

クラインのモデルはロバチェフスキー・ボヤイの幾何学を可視化したもので、そこでは直線が無限遠の長さを持つと仮定されている。リーマンは思考実験を別方向に進め、直線の長さが有限であるような、閉ざされた有限平面で非ユークリッド幾何学のモデルを考えた。ここでの「平面」は、地球のような球の表面として定義される。球面上の二個の異なる点を最短で結ぶのは、その二点と球の中心を含む平面で球を切断して得られる大円なので、これを「平面」において、与えられた二点を通る「直線」とする。任意の

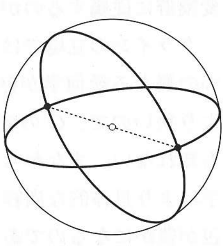


図 13　リーマンのモデル

二本の異なる大円は球面上の二個の対蹠点（球の中心に関して対称な点）で交わるが、「平面」上では二個の対蹠点を一個の「点」と定めれば、任意の二本の異なる「直線」はただ一個の「点」で交わることになる。最後に「距離」や「角度」は、通常の球面上と同様に考えればよい。このような「平面」においては、交わらない、すなわち「平行」な「直線」は定義上全く存在しない。すなわち5の代わりに今度は7を公理としても、それ以外はユークリッド幾何学と全く同等な幾何学が展開されるのである。

「平面」が「無限遠線」とどのような関係にあるかという観点から、クラインとリーマンの示した幾何学はそれぞれ「双曲幾何学」「楕円幾何学」と呼ばれる。実際、双曲線は無限遠線と交わる、すなわち複数の点を共有するのに対し、楕円と無限遠線との共有点は全く存在しない。とすれば、放物線は無限遠線と接する、すなわちただ一個の点を共有するので、ユークリッド幾何学は「放物幾何学」とされることになるだろう。

ここで、本稿の出発点となった第一節での考察に立ち返りたい。射影の操作においては、直線は直線へと写され、一直線の上にある複数の点、一点を通る複数の直線は、その順序を保ったまま同様の図形へと写される。このように射影変換において不変なまま保たれる図形の性質を調べるのが射影幾何学なのだった。同じ方式で言えば、平行移動、回転、鏡映、拡大縮小など、合同変換ないし相似変換で不変なまま保たれる図形の性質を調べるのがユークリッド幾何学である。さて、クラインはエルランゲン大学教授就任に際し、「群」、すなわちある特定の条件を満たす集合の概念を用いて、将来への約束に満ちた、そして実際、彼以後の幾何学の動向を主導することになる研究方針を表明している（『エルランゲン・プログラム』、1872年）。それによれば、ある変換群 G について、G の元である任意の変換によって不変な性質を調べるのが、G に従属する幾何学である。例えば射影変換群に従属するのが射影幾何学、合同・相似変換群に従属するのがユークリッド幾何学ということになる。

クラインの立場では、異なる変換群 G と G' が存在すれば、それぞれに従属する二つの異なる幾何学が存在する。もし G' が G の部分群ならば、G' は変化の範囲が G より狭いので、G の変換では変化しても、G' の変換では不変なままの性質があるかも知れない。すなわち G' は G 以上に多くの不変な性質を持ち、それに従属する幾何学はより具体的な内容を持つだろう。論理学の言葉に翻訳すれば、外延を狭めると内包が豊かになるのである。

射影幾何学においては、線分の長さ、角の大きさのような計量的概念は意味を持たないのだった。いま、射影変換群 G のうち、無限遠線を無限遠線自身に写す部分群

を G_a とすれば、G_a の変換により、無限遠線の上で交わる二直線、すなわち平行線は平行線に、従って平行四辺形は平行四辺形に写される。この時点ではまだ角度が不変ではないので、今度は G_a のうち、無限遠線上のある二点をそれらの点自身に写す部分群を G_e とする。G_e の変換は線分の比と角度を保つので、G_e に従属する幾何学はユークリッド幾何学となる。

これに対し、射影変換群 G のうち、クラインのモデルの「平面」、すなわち円の内部をその円自身の内部に写す部分群を G_h とすれば、G_h に従属する幾何学は双曲幾何学となる。

こうしてクラインは、ユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学がそれぞれ同等の権利を持って射影幾何学から導かれることを明らかにしたのだった。非ユークリッド幾何学の誕生という衝撃的な事件に端を発した、幾何学の基礎に向かっての反省は、19 世紀から 20 世紀にかけての数学界の世界的指導者、ダーフィット・ヒルベルトの『幾何学基礎論 *38』(1899 年) で見事に結晶するが、そこでは「デザルグの定理」と「パスカルの定理」に一章ずつが割かれ、それぞれが幾何学の公理論的基礎付けにおいて枢要な位置を占めることになる。更に言えば、ユークリッド幾何学の空間が古典力学の舞台だったとすれば、アインシュタインが 1916 年に発表した一般相対性理論の舞台は非ユークリッド幾何学の空間であり、そのいずれをも射影幾何学が包摂しているのである。ここに至り、アメリカの数学者エリック・テンプル・ベルが数学者列伝『数学を作った人々』(1937 年) で記したように、

> もし 17 世紀の果敢な先駆者デザルグが、射影という彼の巧妙な方法の導く先を予見できたら、彼は驚愕していたことだろう。自分が何か素晴らしいことを成し遂げたとは知っていても、それがどんなに素晴らしいと判明することになるか、恐らく彼には思い付きさえしなかった *39。

との感を正に禁じ得ない。

---

*38. David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1899 ; 中村幸四郎訳『幾何学基礎論』、ちくま学芸文庫、2005 年。全 7 章のうち、第 5 章が「デザルグの定理」、第 6 章が「パスカルの定理」となっている。

*39. « If Desargues, the daring pioneer of the seventeenth century, could have forseen what his ingenious method of projection was to lead to, he might well have been astonished. He knew that he had done something good, but he probably had no conception of just how good it was to prove. », Eric Temple Bell, *Men of mathematics*, Simon and Schuster, 1937, p.212.

書誌

I. デザルグの著作

1. *Une méthode aisée pour apprendre et enseigner à lire et écire la musique*, in Mersenne, *Harmonie universelle*, t.I, livre IV, prop. I, p.332-342, Paris, 1636 ; rééd. fac-similé, Paris, CNRS, 1975.
2. *Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ni d'autre nature qui soit hors du champs de l'ouvrage*, avec privilège, 32 × 22 cm, 12 p., 1 pl., double, Paris, mai 1636.
3. *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, 19 × 26 cm, 30 p., suivi par *Atteinte aux événements des contrariétés d'entre les actions des puissances aux forces*, 19 × 26 cm, 2 p. et *Avertissement*, errata relatifs aux deux textes précédents, 19 × 26 cm, 4 p., Paris, 1639.
4. *Brouillon projet d'exemple d'une manière universelle du S.G.D.L. touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe de pierres en l'architecture ; et de l'éclaircissement d'une manière de réduire au petit pied en perspective comme en géométral, et de tracer tous cadrans plats d'heures égales au soleil*, 32 × 22 cm, 4 p., 5 pl., Paris, août 1640.
5. *Leçon des ténèbres*, Paris, 1640 ?
6. *Manière universelle de poser le style aux rayons du soleil en quelconque endroit possible avec la règle, le compas, l'équerre et le plomb*, Paris, 1640 ?
7. *Erreur incroyable*, Paris, janver 1642, affiche.
8. *Faute et faussetés énormes*, *id.*
9. *Six erreurs des pages 87, 114, 124, 128, 132 et 134 du Livre intitulé ; La perspective pratique [...]*, in 4°, 14 p., 2 pl., Paris, 1642.
10. *Reconnaissance de Monsieur Desargues*, in Abraham Bosse, III-1, 1643, p.51-55.
11. *Reconnaissance de Monsieur Desargues*, in Abraham Bosse, III-2, 1643, p.25-28.
12. *Livret de perspective adressé aux théoriciens*, Paris, 1643 ?
13. *La honte du Sieur Jacques Curabelle, qui refuse de maintenir à peine d'une somme et au dire de juges, géomètres et jurés maçons de Paris si besoin est*, Paris, 2 avril 1644, affiche.
14. *Sommation faite au Sieur Curabelle, au sujet de ses affiches calomnieuses*, in 4° ? Paris, 18 avril 1644.
15. *Récit au vari de ce qui a été la cause de faire cet écrit*, in 8°, 38 p., mai-juin ? 1644.

II. デザルグの書簡

1. Desargues à Mersenne, 4 avril 1638, Tat. p.80-86.
2. Descartes à Desargues, 19 juin 1639, AT, t.II, p.553-557.
3. Beaugrand à Desargues, 29 juillet 1639, Tat. p.187-190.

III. ボスによるデザルグの敷衍

1. *La pratique du trait à preuve de Monsieur Desargues Lyonnais pour la coupe des pierres en l'architecture*, in 8°, 114 p., 114 pl., Paris, 1643.
2. *La manière universelle de Monsieur Desargues Lyonnais pour poser l'essieu et placer les heures et autres choses aux cadrans au soleil*, in 8°, 68 p., 27 pl., Paris, 1643.
3. *Manière universelle de Monsieur Desargues Lyonnais pour pratiquer la perspective par petit pied comme le géométral, ensemble les places et proportions des fortes et faibles touches, teintes ou couleurs*, in 8°, 344 p., 156 pl., Paris, 1648.
4. *Moyen universel de pratiquer la perspective sur les tableaux ou surfaces irrégulières, ensemble quelques particularités concernant cet art et celui de gravure en taille-douce*, in 8°, 76 p., 32 pl., Paris, 1653.

IV. デザルグへの誹謗文書

1. *Lettre de Monsieur Beaugrand secrétairre du roi, sur le sujet des feuilles intitulées : Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan, et aux événements des contrariétés d'entre les actions des puissances, par le S.G.D.L. avec privilège, 1639*, in 4°, 10 p., Paris, 20 juillet 1640.
2. *Diverses méthodes universelles et nouvelles en tout ou en partie pour faire des perspective, tirées pour la plupart du contenu du livre de la perspective pratique ; ce qui servira de plus de réponses aux deux affiches du Sieur Desargues contre ladite perspective pratique*, in 4°, 14 p., 10 pl., Tavernier et l'Anglois, mars 1640.
3. *Avis charitables sur les diverses œuvres et feuilles volantes du Sieur Girard Desargues Lyonnais, publiées sous les titres : [...]*, in 4°, 39 p., Tavernier et l'Anglois, 1642.
4. CURABELLE, Jacques, *Examen des œuvres du Sieur Desargues Lyonnais*, in 4°, 81 p., Tavernier et l'Anglois, janviers 1644.
5. *Idem.*, *Calomnieuses faussetés contenues dans une affiche du Sieur G. Desargues Lyonnais, intitulée : La honte du Sieur Curabelle*, Paris, 6 avril 1644, affiche.
6. *Idem.*, *Faiblesse pitoyable du Sieur Desargues employée contre l'examen fait de ses œuvres*, in 8°, 9 p., Paris, 1644.

V. デザルグの著作集

1. *Œuvres de Desargues*, 2 vol., éd. par Noël-Germinal Poudra, Leiber, 1864; rééd. fac-similé, Cambridge University Press, 2011, qui contient : I-2, I-3, I-4, I-6,, extrait de III-3 (théorème de deux triangles perspectives), I-12, I-10, I-11 (tome I) ; analyse de III-1, III-2, III-3, III-4 par Poudra, propos sur Desargues (Baillet, Huret, Poncelet, Chasles, etc.), IV-2, IV-4, IV-6 (tome II).
2. *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, éd. par René Taton, PUF, 1951 ; 2e éd., Vrin, 1988, qui contient : II-1, I-3, II-2, II-3, *Essay pour les coniques* de Pascal (1640), extrait de correspondance Carcavy-Huygens (1656), commentaire de Ph. de la Hire sur *Brouillon Projet*, extrait de III-3 (théorème de deux triangles perspectives).

VI. デザルグに関する研究書・論文

1. BIREMBAUD, Arthur, « Quelques documents sur Desargues », RHS, XIV-3, 1961.
2. CHABOUD, Marcel, *Girard Desargues, bourgeois de Lyon, mathématicien, architecte*, Lyon, Aléas, 1996.
3. collectif, *Desargues en son temps*, sous la direction de Jean Dhombres et Joël Sakarovitch, Blanchard, 1994, qui contient :
   - DAMISCH, Hubert, « Desargues et la *Métaphysique* de la perspective ».
   - TATON, René, « Desargues et le monde scientifique de son époque ».
   - DHOMBRES, Jean, « La culture mathématique au temps de la formation de Desargues ».
   - MESNARD, Jean, « Desargues et Pascal ».
   - MALTESE, Corrado, « Ellissi ed ellissografi. *Querelles* semi-scientifiche e applicazioni pratiche negli anni di Desargues ».
   - KNOBLOCH, Eberhard, « Desargues, Mersenne et Kircher : la musique et les mathématiques ».
   - PICOLET, Guy, « Documents inédits concernant Desargues ».
   - LE GOFF, Jean-Pierre, « Desargues et la naissance de la géométrie projective ».
   - BKOUCHE, Rudolf, « Desargues au XIXe siècle, l'influence d'un livre non-lu ».
   - FIELD, Judith, « The infinitely great and the infinitely small in the work of Girard Desargues ».
   - LAURENT, Roger, « La perspective et la rupture d'une tradition ».
   - PINAULT, Madelaine, « L'étude de la perspective dans l'*Histoire de Saint Étienne* par Laurent de la Hyre ».
   - FLOCON, Albert, « Voir et représenter : Abraham Bosse, l'intransigeant ».

– FIORANI, Francesca, « The theory of shadows and aerial perspective : Leonardo, Desargues and Bosse ».
– ECHEVERRÍA, Javier, « Leibniz, interprète de Desargues ».
– BESSOT, Didier, « Les aspects épistémologiques de la pensée didactique de Desargues ».
– ZUVILLAGA, Javier Navarro de, « L'influence des traités de Desargues dans les traités espagnols ».
– OUDET, Jean-François, « Le *style* de Desargues : l'observation associée à la théorie pour placer le style d'un cadran solaire ».
– SAKAROVITCH, Joël, « Le fascicule de stéréotomie, entre savoir et métiers, la fonction de l'architecte ».
– SAINT AUBIN, Jean-Paul, « Les enjeux architecturaux de la didactique stéréotomique de Desargues ».
– BOTTINEAU-FUCHS, Yves, « Abraham Bosse, interprète de Girard Desargues ».
– LE MOËL, Michel, « Jacques Curabelle et le monde des architectes parisiens ».
– DOCCI, Mario, MIGLIARI Riccardo et BIANCHINI Carlo, « Les vies parallèles de Girard Desargues et de Guarino Guarini : fondateurs de la science moderne de la représentation ».
– PICON, Antoine, « Girard Desargues ingénieur ».
– COTTIN, François Régis, « L'architecte et l'architecture à Lyon au temps de Desargues ».
– CHABOUD, Marcel, « Desargues lyonnais ».
– CUER, Georges, « Le notariat lyonnais au XVII^{e} siècle ».
– TATON, René, « À la découverte des œuvres de Girard Desargues ».

4. FIELD, Judith and GRAY, Jeremy, *The geometrical works of Girard Desargues*, Springer-Verlag, 1987.
5. TATON, René, « Découverte d'un exemplaire original du *Brouillon project* sur les coniques de Desargues », RHS, IV-2, 1951.
6. *Idem.*, « Sur la naissance de Girard Desargues », RHS, XV-2, 1962.
7. ZACHARIAS, Melchior, *Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse des Zusammentreffen eines Kegels mit einer Ebene von G. Desargues, (Paris, 1639)*, Leipzig, Ostwald's Klassiker, 1922.

VII. その他、本稿で参照・言及した文献

1. ALBERTI, Leo Battista, *Trattato della pittura*, Nürmberg, 1511.
2. 青木和彦他編『岩波数学入門辞典』岩波書店、2005 年。

3. APOLLONIOS, *Apollonii Pergae conicorum libri quattuor, [...] quae omnia nuper Fredericus Commandinus mendis quamplurimis expurgata e graeco convertit et commentariis illustravit*, Bologna, 1566 ; *Apollonius of Perga, treatise on conic sections*, ed. by Th. Heath, Cambridge, 1896 ; 竹下貞雄訳『円錐曲線論』大学教育出版、2009 年。

4. BAILLET, Adrien, *Vie de Monsieur Descartes*, Paris, 1691.

5. BELL, Eric Temple, *Men of mathematics*, Simon and Schuster, 1937.

6. CAVALIERE, Bonaventura, *Geometria indivisibilibus continuonum nova quadam ratione promota*, Bologna, 1635.

7. CHASLES, Michel, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Hayez, Bruxelles, 1837.

8. collectif, *Dictionnaire des mathématiques*, PUF, 1979.

9. COXETER, Harold Scott Macdonald, *Projective geometry*, second edition, Springer-Verlag, 1973.

10. COURANT, Richard and ROBBINS, Herbert, *What is mathematics ?* second edition, 1996, Oxford University Press.

11. DESCARTES, René, *Œuvres de Descartes*, 11 vol., éd par Ch. Adam et P. Tannery, Vrin, 1996.

12. EIDEN, Jean-Denis, *Géométrie analytique classique*, Calvage et Mounet, 2009.

13. EUCLEIDES, *Euclidis elementorum libri XV [...] cum scholiis antiquis a Frederico Commandino nuper in latinum conversi.*, Pesaro, 1572 ; *Les œuvres en grec, en latin et en français*, éd. par F. Peyrard, Patris, 1814 ; 中村幸四郎他訳『ユークリッド原論』共立出版、1971 年。

14. FERMAT, Pierre de, *Œuvres de Fermat*, éd. par P. Tannery et Ch. Henry, 5 vol., Gauthier-Villars, 1891-1922.

15. FLOCON, Albert et TATON, René, *Perspective*, PUF, 1963.

16. GHETALDI, Marino, *Apollonius redivivus*, Venezia, 1607.

17. HEATH, Thomas Little, *A history of greek mathematics*, Clarendon, 1921.

18. HILBERT, David, *Grundlagen der Geometrie*, 7. Aufl, Teubner, 1930 ; 中村幸四郎訳『幾何学基礎論』、ちくま学芸文庫、2005 年。

19. HURET, Grégoire, *Optique de portraiture et peinture*, Paris, 1670.

20. 礒田正美他編『曲線の事典』共立出版、2009 年。

21. KATZ, Victor, *A history of mathematics*, second edition, Addison Wesley, 1998 ; 上野健爾他監訳『数学の歴史』共立出版、2005 年。

22. KEPLER, Johannes, *Ad Vitellionem paralipomena*, Frankfurt, 1604.

23. *Idem.*, *Astronomia nova*, Heiderburg, 1609.

24. *Idem.*, *Harmonices mundi*, Linz, 1619.

25. KOYRÉ, Alexandre, *From the closed world to the infinite univers*, John Hopkins Press, 1957 ; *Du monde clos à l'univers infini*, trad. par Raissa Tarr, PUF, 1962.

26. LA HIRE, Philippe de, *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques*, Paris, 1673.

27. MESNARD, Jean, *La culture du XVII^e siècle*, PUF, 1992,

28. MYDORGE, Claude, *Prodromi catoptricorum et dioptricorum*, Paris, 1631.

29. PANOFSKY, Erwin, *Die Perspektive als symbolische Form*, Warburg, 1924-1925 ; 木田元監訳『象徴形式としての遠近法』、ちくま学芸文庫、2009 年。

30. PASCAL, Blaise, *Œuvres de Pascal*, 5 vol., éd. par Bossut, Detune, La Haye, 1779.

31. *Idem.*, *Œuvres complètes*, 4 vol., éd. par J. Mesnard, Desclée de Brouwer, 1964-1992.

32. *Idem.*, *Pensées*, éd. par Philippe Sellier, Bordas, 1991.

33. PONCELET, Jean-Victor, *Traité des propriétés projectives des figures*. Gauthier-Villars, 1822.

34. PLÜCKER, Julius, *Analytische-Geometrische Entwicklungen*, 1828-1831.

35. RICHTER-GEBERT, Jürgen, *Perspectives on projective geometry*, Springer-Verlag, 2011.

36. 佐々木力『数学史』岩波書店、2010 年。

37. SNELL, Willebrord, *Apollonius Batavus*, Lugodini, 1608.

38. 寺坂英孝『非ユークリッド幾何の世界』講談社、1977 年。

39. STAUDT, Carl Georg Christian von, *Geometrie der Lage*, Nürmberg, 1847.

40. STEINER, Jacob, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Berlin, 1832.

41. STRUIK, Dirk, *Lectures on analytic and projective geometry*, Addison-Wesley, 1953.

42. 遠山啓『無限と連続』岩波書店、1952 年。

43. VIÈTE, François, *Apollonius Gallus*, Paris, 1600.

論文要旨

L'origine de la géométrie projective (1)

— La notion de l'infini dans le *Brouillon projet* (1639) de Girard Desargues —

KUKITA Eishi

Cet article se lira comme le chapitre premier d'une étude que nous consacrerons à la genèse d'une géométrie, qui se qualifie aujourd'hui de « projective » : côté relativement mal connu de la révolution mathématico-physico-métaphysique qui marqua le début de la modernité en Europe. Dans cette partie inaugurale, nous essayerons de mettre en évidence le rôle décisif que joua la notion de l'infini au cours de la gestation de cette géométrie originale, en analysant les premiers paragraphes d'un texte majeur de son fondateur : *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan* (1639) de Girard Desargues (1591-1661).

A la suite des recherches astronomiques et optiques de Kepler décelant le second foyer de la parabole à la distance infinie, Desargues introduisit la notion de l'infiniment grand dans la géométrie, en posant que, de même que deux points distincts quelconques se joignent par une seule ligne droite, de même *deux lignes droites distinctes quelconques se rencontrent en un seul point*, et que c'est à un point idéal, se trouvant à la distance infinie, que les parallèles se croisent. Cette idée, si déconcertante qu'elle paraisse, est bien naturelle en fait dans le cadre de la perspective, dans laquelle Desargues, ingénieur-architecte compétent, était fort bien versé ; technique picturale due aux peintres de la Renaissance, ce savoir à la pointe de l'époque symbolise l'idée moderne de l'espace, conçu comme rationnel et mathématique, c'est-à-dire continu, homogène et infini. Deux siècle plus tard, il s'avérera que de cette invention audacieuse de Desargues relèvent non seulement la géométrie euclidienne, mais aussi celles non-euclidiennes, où se renie l'axiome de celle-là sur les parallèles, lequel passe pour un lieu commun : *par un point ne se trouvant pas sur une ligne droite, passe une seule parallèle à celle-ci.*