

# Essai de présentation structurée du *Brouillon projet* de Desargues — 1<sup>ère</sup> partie —

KUKITA EISHI

Mots clefs : histoire des mathématiques, géométrie projective,  
France, XVII<sup>e</sup> siècle, Desargues

Du *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan* (1639) de Girard Desargues (1591-1661), nous avons esquissé ailleurs les idées directrices, à commencer par celle d'*infiniment grand*, qui sous-tendent ce texte fondateur de la géométrie projective, et évoqué les raisons pour lesquelles le génie de ce géomètre fut dédaigneusement négligé par la plupart de ses contemporains médiocres, et peu compris par les générations postérieures, jusqu'à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle <sup>\*1</sup>. Leibniz, chargé d'enquête sur des travaux mathématiques posthumes de Pascal, disciple brillant de Desargues, témoigna en effet de n'avoir pu retrouver aucune copie de ce texte dix ans après la mort de l'auteur <sup>\*2</sup>, et ce n'est qu'au milieu du XX<sup>e</sup> siècle, en 1951, que fut enfin établie une édition philologiquement irréprochable de cet ouvrage, tenant compte pour la première fois de la version originale, un de ses exemplaires ayant été miraculeusement redécouvert dans un carton de la Bibliothèque nationale de France au bout de trois siècles d'oubli <sup>\*3</sup>.

---

<sup>\*1</sup> Cf. notre article en japonais inédit, < Hayasugita kikagakusha — Jiraru Dezarugu ryakuden > (Abrégé de la vie de Girard Desargues — géomètre qui apparut trop tôt), ou sa version réduite, < Jiraru Dezarugu >, in *Shin Satsuma-gaku* 9, Nanpo-Shinsha, 2013, p.270-339.

<sup>\*2</sup> René Taton, < Desargues et le monde scientifique de son époque, in collectif, Desargues en son temps, Blanchard, 1994 (sigle : DST), p.48.

<sup>\*3</sup> Idem, Découverte d'un exemplaire original du *Brouillon projet* sur les coniques de Desargue >, in *Revue de l'histoire des sciences et de leurs applications*, IV-2, 1951.

Nous disposons donc aujourd'hui d'une édition critique fiable du *Brouillon projet*, due aux efforts de René Taton, réanimateur de l'intérêt pour l'origine de la géométrie projective <sup>\*4</sup>. Il n'en reste pas moins que l'obscurité du texte est indéniable pour nous autres lecteurs modernes, d'une part par le néologisme de l'auteur trop personnel, inspiré curieusement par le monde végétal, mais surtout par son refus délibéré du langage algébrique, perfectionné vers les années 1630 par deux contemporains illustres, Fermat et Descartes, juste au moment de la gestation des nouvelles idées géométriques chez Desargues. L'invention de ceux-là, qu'on nomme aujourd'hui géométrie analytique, très puissante et commode, devint vite dominante dans les mathématiques, pour être dorénavant le moteur du progrès des sciences modernes elles-mêmes mathématisées, et le respect dont les deux grands savants témoignèrent pour Desargues n'empêcha pas que son invention à lui, à la fois trop novatrice et véhiculée par un langage démodé de la géométrie traditionnelle, resta longtemps victime d'une incompréhension presque totale.

Plus d'un demi siècle après la parution, l'édition de Taton est elle-même épuisée, alors qu'on n'en a aucune qui la remplace actuellement. C'est ainsi que nous nous permettons de publier ici quelque résultats de nos travaux pour combler cette lacune, et les pages qui suivent ont pour but de tenter d'améliorer autant que possible la lisibilité du *Brouillon projet*, texte trop peu lu mais dont l'importance historique est incontestable. Voici ce que nous pensons être de nos apports.

- Dans la version originale, consultable actuellement dans le site de l'internet < Gallica > de la Bibliothèque Nationale de France, 30 pages du texte, chacune ayant 61 lignes et suivies de 4 pages d'*Avertissement*, se donnent d'un seul bloc, sans aucune division apparente. Nous avons essayé de faire ressortir l'articulation du texte en le sectionnant, et en donnant à chacune des sections un titre qui la résume. Nous avons aussi numéroté chaque paragraphe, pour faciliter les renvois à l'intérieur du texte.
- Les notes en bas sont réservées aux éclaircissements du texte de notre part, tantôt

---

<sup>\*4</sup> Idem, *Œuvres mathématique de G. Desargues*, Presses universitaires de France, 1951 ; 2<sup>e</sup> édition, Vrin, 1988.

historiques, tantôt mathématiques.

– Les figures qui illustrent le texte ont été toutes tracées par nous, les planches de la version originale qui en continssent étant toujours perdues.

Le texte du *Brouillon projet* est trop long pour qu’il se donne tout entier d’un seul coup dans le cadre de cette revue. La partie publiée ici est celle que l’on peut qualifier de préliminaire, c’est-à-dire ce qui appartient à la géométrie métrique, et servira de lemmes aux développements ultérieurs sur les propriétés projectives de figures géométriques.

Notations

numéro en marge	pagination dans la version de 1639
<i>mots en gras italique</i>	terme défini par l’auteur
[...]	avis de l’auteur dans l’ <i>Avertissement</i>
← ⟨...⟩	correction indiquée par l’auteur dans l’ <i>Avertissement</i>
↔ ⟨...⟩	correction par l’éditeur

\* \* \* \* \*

1639    AVEC PRIVILÈGE  
BROUILLON PROJET D’UNE ATTEINTE  
aux Événements des Rencotres du Cône avec un Plan  
Par    L. S. G. D. L. \*5

1    Le fini et l’infini

1.1    Préambule

1.1.1    Il ne sera pas malaisé de faire ici la distinction nécessaire d’entre les imposi- 1

\*5 C’est-à-dire, Le Sieur Girard Desargues Lyonnais.

tions de nom, autrement définition, les propositions, les démonstrations quand elles sont en suite, et les autres espèces de discours ; non plus que de choisir entre les figures celle qui a rapport au période qu'on lit, ou de faire ces figures sur le discours.

1.1.2 Chacun pensera ce qui lui semblera convenable, ou de ce qui est ici déduit, ou de la manière de le déduire ; et verra que la raison essaie à connaître des quantités infinies d'une part, ensemble des si petites que leurs deux extrémités opposées sont unies entre elles ;  $\Leftarrow$  (ensemble de celles qui s'apetissent jusqu'à réduire leurs deux extrémités opposées en une seule  $\rightarrow$ ) et que l'entendement s'y perd, non seulement à cause de leurs inimaginables  $\Leftarrow$  (imaginables) grandeur et petitesse, mais encore à cause que le raisonnement ordinaire le conduit à en conclure des propriétés, dont  $\Leftarrow$  (propriétés, d'où) il est incapable de comprendre comment c'est qu'elles sont.

## 1.2 L'ordonnance des lignes droites et leur but

1.2.1 Ici toute ligne droite est entendue allongée au besoin à l'infini d'une part et d'autre.

1.2.2 Un semblable allongement à distance infinie d'une part et d'autre en une droite, est ici représenté par une rangée de points alignés d'une part et d'autre en suite de cette droite.

1.2.3 Pour donner à entendre de plusieurs lignes droites, qu'elles sont toutes entre elles ou bien parallèles, ou bien inclinées à un même point,  $\Leftarrow$  (à même point,) il est ici dit que toutes ces droites sont d'une même *ordonnance*, par où l'on concevra de ces plusieurs droites, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, elles tendent comme toutes  $\Leftarrow$  (tendent toutes) à un même endroit.

1.2.4 L'endroit auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droites en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de positions, est ici nommé *but* de l'ordonnance de ces droites.

1.2.5 Pour donner à entendre l'espèce de position d'entre plusieurs droites, en la-

quelle elles sont toutes parallèles entre elles, il est ici dit que toutes ces droites sont entre elles d'une même ordonnance, dont le but est à distance infinie en chacune d'elles d'une part et d'autre.

1.2.6 Pour donner à entendre l'espèce de position d'entre plusieurs droites, en laquelle elles sont toutes inclinées à un même point, il est ici dit que toutes ces droites sont entre elles d'une même ordonnance, dont le but est à distance finie en chacune d'elles.

1.2.7 Ainsi deux quelconques droites en un même plan sont entre elles d'une même ordonnance, dont le but est à distance ou finie, ou infinie \*6.

### 1.3 L'ordonnance des plans et leur essieu

1.3.1 Ici tout plan est pareillement entendu étendu de toutes parts à l'infini.

1.3.2 Une semblable étendue d'un plan à l'infini de toutes parts, est ici représentée par un nombre de points semés de toutes parts au même plan.  $\Leftarrow$  (aux extrémités du plan.)

1.3.3 Pour donner à entendre de plusieurs plans, qu'ils sont tous entre eux ou bien parallèles, ou bien inclinés à une même droite, il est ici dit que toutes ces plans sont entre eux d'une même **ordonnance**, par où l'on concevra de ces plusieurs plans, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, ils tendent comme tous  $\Leftarrow$  (tendent tous) à un même endroit.

1.3.4 L'endroit auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs plans en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de positions, a ici nom **essieu**  $\Leftarrow$  (est ici nommé *but*) de l'ordonnance de ces droites.

1.3.5 Pour donner à entendre l'espèce de position d'entre plusieurs plans, en laquelle

---

\*6 AXIOME I Deux droites quelconques distinctes sur un même plan se rencontrent en un seul point ; soit en un point idéal, qui se trouve à distance infinie d'une part et d'autre en chacune d'elles, si elles sont parallèles ; soit en un point ordinaire, si elles ne le sont pas.

Cet axiome, symétrique avec le premier postulat des *Éléments* d'Euclide : < deux points quelconques distincts se joignent par une seule droite > , forme avec lui le principe de *dualité*, caractéristique de la géométrie projective, mis en évidence au début du XIX<sup>e</sup> siècle par Gergonne et Poncelet.

ils sont tous parallèles entre eux, il est ici dit que toutes ces plans sont entre eux d'une même ordonnance, dont l'essieu  $\Leftarrow$  *⟨le but⟩* est en chacun d'eux à distance infinie.

1.3.6 Pour donner à entendre l'espèce de position d'entre plusieurs plans, en laquelle

ils sont tous inclinés à une même droite, il est ici dit que toutes ces plans sont entre eux d'une même ordonnance, dont l'essieu  $\Leftarrow$  *⟨le but⟩* est en chacun d'eux à distance finie.

1.3.7 Ainsi deux quelconques plans sont entre eux d'une même ordonnance, dont l'essieu  $\Leftarrow$  *⟨le but⟩* est en chacun d'eux à distance ou finie, ou infinie <sup>\*7</sup>.

## 1.4 Le cercle et la ligne droite

1.4.1 En concevant qu'une droite infinie, ayant un point immobile, se meut en tout sa longueur,  $\Leftarrow$  *⟨la longueur,⟩* on voit qu'aux diverses places qu'elle prend en ce mouvement, elle donne ou représente comme diverses droites d'une même ordonnance entre elles, dont le but est son point immobile.

1.4.2 Quand le point immobile de cette droite y est à distance finie, et qu'elle se meut en un plan, on voit qu'aux diverses places qu'elle prend en ce mouvement, elle donne ou représente comme diverses droites d'une même ordonnance entre elles, dont le but (son point immobile) est en chacune d'elles à distance finie, et que tout autre point que l'immobile de cette droite va traçant une ligne simple uniforme, et dont les deux quelconques partie sont d'une même  $\parallel$  conformation et conviennent entre elles, c'est-à-dire courbée en pleine rondeur, autrement la circulaire.  $\Leftarrow$  *⟨la circulaire, toujours également éloignée du point immobile.⟩* 2

1.4.3 Quand le point immobile de cette droite y est à distance infinie, et qu'elle se meut en un plan, on voit qu'aux diverses places qu'elle prend en son mouvement, elle

---

<sup>\*7</sup> Il s'agit d'une extension de ce que nous avons résumé comme AXIOME I : *Deux plans quelconques distincts se rencontrent en une seule droite ; soit en une droite idéale, qui se trouve à distance infinie de toutes parts en chacun d'eux, s'ils sont parallèles ; soit en une droite ordinaire, s'ils ne le sont pas.* Cet axiome ne sera pas repris dans la suite.

donne ou représente comme diverses droites d'une même ordonnance entre elles, dont le but (son point immobile) est en chacune d'elles à distance infinie d'une part et d'autre, et que tout autre point que l'immobile de cette droite va traçant une ligne simple uniforme, et dont les deux quelconques partie sont d'une même conformation et  $\Leftarrow$   $\langle$ conformation, toujours également éloignée du point immobile, et $\rangle$  conviennent entre elles, à savoir une ligne droite et perpendiculaire à celle qui se meut.

1.4.4 Et suivant la pointe de cette conception, finalement on y voit comme une espèce de rapport entre la ligne droite infinie et la circulaire,  $\Leftarrow$   $\langle$ entre la ligne droite infinie, qui est perpendiculaire à plusieurs autres diverses droites, et la ligne courbée d'une courbure uniforme et qui est toujours également éloignée du but de plusieurs droites d'une même ordonnance à distance finie ; c'est-à-dire le rapport de la ligne droite infinie avec la circulaire en sa pleine rondeur, $\rangle$  en façon qu'elles paraissent être comme deux espèces d'un même genre, dont on peut énoncer le tracement en mêmes paroles \*8.  $\Leftarrow$   $\langle$ en même paroles. $\rangle$

## 2 Configurations de points et de droites en arbre

### 2.1 Tronc, nœud, rameau et brin

2.1.1 Quand à divers points d'une droite passent indifféremment diverses autres droites, cette droite, en laquelle sont les points, est ici nommée **tronc**.

2.1.2 Les points de ce tronc, auxquels  $\Leftarrow$   $\langle$ auquel $\rangle$  passent ainsi d'autres droites, y sont nommés **nœuds**.

2.1.3 La quelconque autre droite, qui passe à un de ces nœuds, est à l'égard du tronc nommée **rameau**.

2.1.4 Quand deux rameaux sont parallèles entre eux, ils y sont nommés **rameaux**

---

\*8 Descartes salua le talent de généralisation chez Desargues dans sa lettre à Mersenne, le 9 janvier 1639 :  $\langle$ La façon dont il commence son raisonnement, en l'appliquant tout ensemble aux lignes droites et aux courbes, est d'autant plus belle qu'elle est générale, et semble être prise de ce que j'ai coutume de nommer *métaphysique de la géométrie*, qui est une science dont je n'ai point remarqué qu'aucun autre se soit jamais servi, sinon Archimède.  $\rangle$  Descartes, *Œuvres de Descartes*, 11 vol., éd. par Adam et Tannery, Vrin, 1996 (sigle : AT), t.II, p.490.

*parallèles* entre eux.  $\Leftarrow$  (rameaux droits.)

2.1.5 Quand un rameau coupe le tronc ou s'écarte du tronc, il est ici nommé **rameau déployé** au tronc.

2.1.6 Une quelconque pièce ou segment du tronc, contenue entre deux quelconques nœuds du même tronc, est ici nommée  $\Leftarrow$  (nommé) **rameau plié** au tronc.

2.1.7 Plusieurs rameaux parallèles entre eux,  $\Leftarrow$  (rameaux droits,) déployés au tronc à l'aventure, sont ici tous nommés **ramure**.

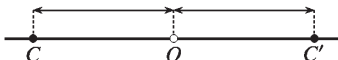
2.1.8 Chacune de deux pièces  $\Leftarrow$  (rameau plié au tronc. // Chaque pièce) ou segment d'un rameau, contenue entre son nœud et quelque autre rameau ou son nœud,  $\Leftarrow$  (de son nœud,) est ici nommée  $\Leftarrow$  (nommé) **brin** de ce rameau.

## 2.2 Point commun engagé / dégagé

[Tout ce qui jusqu'à la page 10 est coté de A, B, C, D, se rapporte aux lignes simples de la stampe.]

2.2.1 Quand en une droite  $OC' A'$  <sup>\*9</sup>, un point  $O$  est commun à chacune des deux pièces  $OC'$ ,  $OC$  ; ou bien ces pièces sont placées séparément, l'une  $OC'$  d'une part, l'autre  $OC$  de l'autre part de leur point commun  $O$ , qui par ce moyen est entre elles deux ; ou bien elles sont placées toutes deux conjointement d'une même part de leur point commun  $O$ , qui par ce moyen n'est pas entre elles deux.

2.2.2 Pour donner à entendre l'espèce de position de leur point commun au regard d'elles, quand il est entre elles deux, il est ici dit que leur point commun  $O$  est **engagé** entre elles deux.



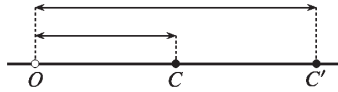
2.2.3 Pour donner à entendre l'espèce de position de leur point commun au regard

\*9 D'ici jusqu'à la section 4.6, pour marquer le couplage des points, nous modifierons leurs cotes de la façon suivante :

la version de 1639		A	B	H	C	G	D	F	L
notre version		O	A	A'	B	B'	C	C'	C''



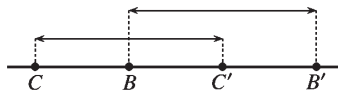
d'elles, quand il n'est pas entre elles deux, il est ici dit que leur point commun  $O$  est *dégagé* d'entre elles deux.



## 2.3 Points mêlés / démêlés

2.3.1 Quand en une droite  $CC'$ , il y a deux couples de points  $\{B, B'\}$ ,  $\{C, C'\}$  ; ou bien l'un des point  $B$  de l'une des couples  $\{B, B'\}$  est placé entre les deux points de l'autre couple  $\{C, C'\}$ , et l'autre point  $B'$  de la même couple  $\{B, B'\}$  est hors d'entre les mêmes deux points  $\Leftarrow$  (les deux mêmes deux points) de l'autre couple  $\{C, C'\}$  ; ou bien les deux points d'une même couple  $\{B, B'\}$  sont de même tous deux, ou entre, ou hors d'entre les deux points de l'autre couple  $\{C, C'\}$ .

2.3.2 Pour donner à entendre l'espèce de position des points d'une de ces deux couples au regard des points de l'autre couple, quand l'un des points d'une couple  $B$  est entre, et que son accouplé  $B'$  est hors d'entre les points de l'autre couple, il est ici dit que les points de l'une des couples sont *mêlés* aux points de l'autre couple.



2.3.3 Pour donner à entendre l'espèce de position des points d'une de ces deux couples au regard des points de l'autre couple, quand les points d'une couple sont tous deux semblablement, ou entre, ou hors d'entre les points de l'autre couple, il est ici dit que les points de l'une des couples sont *démêlés* aux points de l'autre couple.

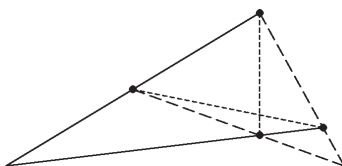


## 2.4 Borne et bornale droite

2.4.1 Quand en un plan, quatre points ne sont pas tous en une même droite, chacun de ces points est à l'égard des autres ici nommé **borne**.

2.4.2 Chaque droite qui passe à deux quelconques de ces quatre bornes est, à l'égard de ces points, ici nommée **bornale droite** <sup>\*10</sup>.

2.4.3 Les deux droites qui passent l'une aux deux, l'autre aux deux autres de quatre bornes, sont couplées entre elles et nommées **couple de bornales droites**.



2.4.4 Chaque bornale droite peut à l'occasion être un tronç.

## 2.5 Quelques propositions classiques

2.5.1 Proposition comprenant les 5 et 6 du II des *Éléments* d'Euclide et sa converse.

← (d'Euclide.)

2.5.2 Proposition comprenant les 9 et 1' du II des *Éléments* d'Euclide et sa converse.

← (d'Euclide.)

2.5.3 Proposition comprenant les 35 et 36 du III des *Éléments* d'Euclide et sa converse <sup>\*11</sup>. ← (d'Euclide.)

<sup>\*10</sup> Les quatre *bornes* et six *bornales droites* constituent ce que l'on appelle aujourd'hui quadrangle complet, dont les côtés correspondent à celles-ci, et les sommets à celles-là. Cette notion fut réintroduite au XIX<sup>e</sup> siècle par Steiner (*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, 1832) comme notion corrélatrice de quadrilatère complet, qui tint un rôle essentiel dans la *Géométrie de position* de Carnot (1803).

<sup>\*11</sup> Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points alignés, avec les longueurs  $|AB| = 2a$ ,  $|AC| = |CB| = a$ ,  $|CD| = b < a$  ; alors les quatre propositions du livre II se traduisent en les égalités :

$$(a + b)(a - b) + b^2 = a^2 \quad (\text{II.5})$$

$$(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2 \quad (\text{II.6})$$

2.5.4 Quand en un même plan, à trois points comme nœuds d'une droite comme tronc, passent || trois quelconques rameaux déployés à ce tronc, les deux brins de quel- 3  
conque de ces rameaux, contenus entre leur nœud ou tronc, et chacun des autres deux  
rameaux, sont entre eux en raison même que la composée des raisons d'entre les deux  
pareils brins de chacun de ces autres deux rameaux convenablement ordonnés. Énoncée  
autrement en Ptolémée <sup>\*12</sup>. [*Cette proposition est après au long au bas de la page 10.*]

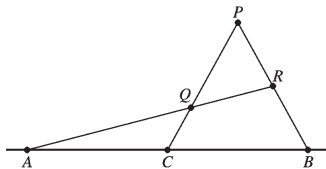
## 2.6 Arbre, souche et branche

2.6.1 Quand en une droite  $OA'$ , il y a un point  $O$ , commun et semblablement engagé  
ou dégagé aux deux pièces de chacune de trois couples,  $\{OA, OA'\}$ ,  $\{OB, OB'\}$ ,  $\{OC,$   
 $OC'\}$ , dont les trois rectangles sont égaux entre eux, une telle condition en une droite est  
ici nommée **arbre**, dont la droite même est **tronc** <sup>\*13</sup>.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 + (a-b)^2 &= 2(a^2 + b^2) & (II.9) \\ (2a+b)^2 + b^2 &= 2\{a^2 + (a+b)^2\} & (II.10) \end{aligned}$$

Quant aux deux propositions du livre III, il s'agit de la puissance d'un point par rapport à un cercle, dans le cas de deux sécantes (III.35) et dans le cas d'une sécante et d'une tangente (III.36).

\*12 Soient  $QR$ ,  $RP$  et  $PQ$  les trois côtés d'un triangle  $PQR$ , qui coupent une droite  $l$  respectivement en  $A$ ,  $B$  et  $C$  (donc  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois *nœuds* du tronc  $l$ , et  $QR$ ,  $RP$  et  $PQ$  trois *rameaux déployés*) ;



alors on a

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{BP}} \times \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}},$$

ce qui est le théorème attribué de nos jours, non pas à Ptolémée, mais à Ménélaüs. Nous signalons d'ailleurs que la notion de segment orienté, notée comme  $\overline{PQ}$  où  $\overline{QP} = -\overline{PQ}$ , certes inconnue de Desargues, se révélera très efficace pour rendre manifeste la tendance unificatrice qui caractérise notre auteur.

\*13 DÉFINITION I Étant donné s sur une droite sept points  $A, A', B, B', C, C'$  et  $O$ , ils constituent un **arbre**, s'ils vérifient :

$$\overline{OA} \times \overline{OA'} = \overline{OB} \times \overline{OB'} = \overline{OC} \times \overline{OC'}. \quad (2.6.1)$$

On verra d'ailleurs que c'est justement en ces trois couples de *nœuds*  $\{A, A'\}$ ,  $\{B, B'\}$ ,  $\{C, C'\}$ , que le *tronc* d'un *arbre* rencontre les trois couples de *bornales droites*, c'est-à-dire les six côtés d'un quadrangle complet.

2.6.2 Le point comme  $O$ , ainsi commun à chacune de ces six pièces  $\{OA, OA'\}, \{OB, OB'\}, \{OC, OC'\}$ , y est nommé **souche**.

2.6.3 Chacune des mêmes pièces  $\{OA, OA'\}, \{OB, OB'\}, \{OC, OC'\}$ , y est nommée **branche**.

2.6.4 Quand les deux branches qui contiennent un de ces trois rectangles égaux sont égales entre elles, elles y sont nommées **branches moyennes**.

2.6.5 Quand les deux branches qui contiennent un de ces trois rectangles égaux sont inégales entre elles, elles sont ici nommées couple de **branches extrêmes**.

2.6.6 Les deux branches  $\Leftarrow \langle \text{branches moyennes. // Les deux branches} \rangle$  comme  $\{OA, OA'\}$ , ou  $\{OB, OB'\}$ , ou  $\{OC, OC'\}$ ,  $\Leftarrow \langle \{OB', OB\}$ , ou  $\{OC', OC\}$ , ou  $\{OA', OA'\} \rangle$  dont le rectangle est égal à chacun des autres deux rectangles, y sont nommées **branches couplées** entre elles.

2.6.7 Chacun des bouts séparés  $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}$ , des branches de chacune des trois couples  $\{OA, OA'\}, \{OB, OB'\}, \{OC, OC'\}$ , y est nommé **nœud**.

2.6.8 Voilà comme les nœuds de l'arbre sont disposés au long du tronc.

2.6.9 Les nœuds des branches moyennes y sont nommés **nœuds moyens**.

2.6.10 Les deux nœuds d'une couple de branches extrêmes, y sont nommés couple de **nœuds extrêmes**.

2.6.11 Les deux nœuds  $\Leftarrow \langle \text{nœuds moyens. // Les deux nœuds} \rangle$  comme  $\{B, B'\}$ ,  $\Leftarrow \langle \{B', B'\} \rangle$  que donnent au tronc de l'arbre les deux branches d'une quelconque même couple  $\{OB, OB'\} \Leftarrow \langle \{OB', OB\} \rangle$  y sont nommés **nœuds couplés** entre eux.

2.6.12 Deux rameaux déployés au tronc qui passent aux deux nœuds d'une couple, y sont nommés **couple de rameaux déployés** au tronc.

2.6.13 Chaque pièce du même arbre comme la pièce  $B'C'$ , contenue entre un quelconque des nœuds  $B'$  d'une quelconque couple  $\{B, B'\}$ ,  $\Leftarrow \langle \{B', B'\} \rangle$  et un autre quelconque nœud  $C'$  d'une autre quelconque des autres couples  $\{C, C'\}$ , y est nommé **brin de rameau plié** au tronc.

## 2.7 Couples de brins relatives / jumelles

2.7.1 Voilà comme un semblable brin de rameau plié au tronc se trouve  $\Leftarrow$  (brin de rameau se trouve) être ou la somme, ou la différence d'entre deux branches de deux couples diverses.

2.7.2 Deux brins de rameaux pliés au tronc comme  $\{B'C, B'C'\}$ , qu'une quelconque branche  $OB'$  porte, d'une part noués ensemble à son nœud  $B'$ , et qui d'autre part aboutissent l'un à un, l'autre à l'autre des deux nœuds  $\{C, C'\}$  d'une quelconque autre couple de branches  $\{OC, OC'\}$ , y sont nommés *brins de rameaux couplés* entre eux.

2.7.3 La couple de brins de rameaux comme  $\{BC, BC'\}$ , que la branche  $OB$ , couplée de la branche  $OB'$ , porte, d'une part noués ensemble à son nœud  $B$ , et qui d'autre part aboutissent l'un à un, l'autre à l'autre des deux mêmes nœuds  $\{C, C'\}$ , auxquels aboutissent aussi les deux brins de la couple  $\{B'C, B'C'\}$ , y est nommée *couple de brins relative* à la couple aussi de brins  $\{B'C, B'C'\}$ .

2.7.4 Deux couples de brins comme les deux couples  $\{B'C, B'C'\}$  et  $\{BC, BC'\}$ , dont chacune des deux branches couplées entre elles  $\{OB', OB\}$ , porte une couple à son nœud, et qui d'ailleurs aboutissent ensemble  $\Leftarrow$  (aboutissent) à chacun des deux nœuds d'une quelconque des autres couples  $\{C, C'\}$ , y sont nommées *couples de brins relatives* entre elles.

2.7.5 Les deux rectangles de chacune de deux couples de brins relatives entre elles, comme les rectangles des brins de la couple  $\{B'C, B'C'\}$  et des brins de la coupe  $\{BC, BC'\}$ , y sont nommés *rectangles relatifs* entre eux.

2.7.6 Deux couples de brins comme  $\{B'C, B'C'\}$  et  $\{B'A, B'A'\}$ ,  $\Leftarrow$   $\langle \{B'C, B'C'\}, \{B'A, B'A'\} \rangle$ , qu'une même branche  $OB'$  porte, nouées ensemble à son nœud  $B'$ , et qui d'ailleurs aboutissent à deux couples diverses d'autres nœuds  $\{C, C'\}$ ,  $\{A, A'\}$ , y sont nommées *couples de brins jumelles* entre elles. [On notera que les branches et nœuds sont ordinairement énoncés par couples, et que partant en l'impression, il faut séparer les cotes d'une couple d'avec les cotes d'une autre couple, quand ces cotes sont immédiatement en suite l'une de l'autre ; de même

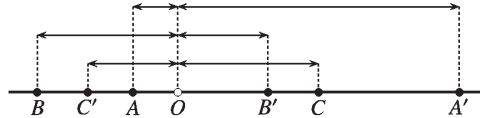
*réformer les transpositions de lettres aux cotes quand il y en a, voire même pour une facilité on pourrait employer en chacune des figures toujours mêmes lettres de cotes en semblables occasion et nature de propriété.]*

2.7.7 Les deux rectangles de deux couples jumelles de brins, comme de la couple  $\{B'C, B'C'\}$  et de la couple  $\{B'A, B'A'\}$ , y sont nommés **rectangles jumeaux** entre eux.

## 2.8 Deux espèces d'arbre

2.8.1 Quand en un arbre  $OA'$ , la souche  $O$  se trouve engagée entre les deux branches de la quelconque des couples  $\{OB, OB'\}$ , la même souche  $O$  se trouve de même évidemment engagée entre les deux nœuds de chacune des couples  $\{B, B'\}$ ,  $\{A, A'\}$  ; et les deux nœuds de chacune des couples  $\{B, B'\}$  se trouvent mêlés évidemment aux deux nœuds de chacune des autres deux couples  $\{C, C'\}$ ,  $\{A, A'\}$ .

2.8.2 Et par contre, quand en un arbre  $OA'$ , les deux nœuds d'une quelconque des couples  $\{B, B'\}$  sont mêlés aux deux nœuds d'une quelconque des autre couples  $\{C, C'\}$ , aussi la souche  $O$  se trouve engagée entre les deux branches de chacune des couples  $\{OA, OA'\}$ ,  $\{OB, OB'\}$ ,  $\{OC, OC'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{OB, OB'\}, \{OA, OA'\}, \{OC, OC'\} \rangle$  et entre les deux nœuds de chacune des couples  $\{A, A'\}$ ,  $\{B, B'\}$ ,  $\{C, C'\}$  <sup>\*14</sup>.  $\leftarrow \langle \{B, B'\}, \{C, C'\}, \{A, A'\} \rangle$

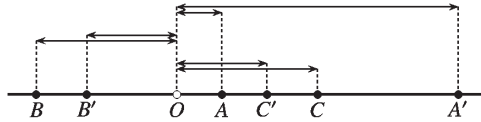


2.8.3 Quand en un arbre  $OA'$ , la souche  $O$  se trouve dégagée d'entre les deux branches de chacune des couples  $\{OA, OA'\}$ ,  $\{OB, OB'\}$ ,  $\{OC, OC'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{OB, OB'\}, \{OA, OA'\}, \{OC, OC'\} \rangle$  la même souche  $O$  se trouve évidemment aussi dégagée d'entre les deux

<sup>\*14</sup>  $\overline{OA} \times \overline{OA'} = \overline{OB} \times \overline{OB'} = \overline{OC} \times \overline{OC'} < 0 \Leftrightarrow$  La souche est engagée.  $\Leftrightarrow$  Les nœuds sont mêlés.

nœuds de chacune des couples  $\{A, A'\}$ ,  $\{B, B'\}$ ,  $\{C, C'\}$  ;  $\leftarrow \langle \{B, B'\}, \{C, C'\}, \{A, A'\} \rangle$  et les deux nœuds de chacune des couples  $\{A, A'\}$ ,  $\{B, B'\}$ ,  $\{C, C'\} \leftarrow \langle \{B, B'\}, \{C, C'\}, \{A, A'\} \rangle$  se trouvent évidemment aussi démêlés des deux nœuds de chacune des autres deux couples.

2.8.4 Et par contre, quand en un arbre, les deux nœuds de la quelconque des couples  $\{B, B'\}$  se trouve || démêlés des deux nœuds de chacune des autre couples  $\{C, C'\}$ , aussi 4 la souche  $O$  se trouve dégagée d'entre les deux nœuds et les deux branches de chacune des couples <sup>\*15</sup>.



2.8.5 Desquelles choses suit évidemment qu'étant donnée en un arbre l'espèce d'une seule de toutes ces positions de souche, de branches et de nœuds au regard l'un de l'autre, l'espèce est aussi donnée de chacune de ces autres positions d'entre le surplus des mêmes choses.

### 3 Involution de six points

#### 3.1 Équivalence arbre-involution

3.1.1 Et généralement en chacune de ces deux espèces de conformation d'arbre, comme la quelconque des branches  $OB'$  est à son accouplée  $OB$ , ainsi le rectangle d'une quelconque des couples de brins  $\{B'C, B'C'\}$ , que porte cette quelconque branche  $OB'$ , est à son relatif le rectangle  $\{BC, BC'\}$  <sup>\*16</sup>.

<sup>\*15</sup>  $\overline{OA} \times \overline{OA'} = \overline{OB} \times \overline{OB'} = \overline{OC} \times \overline{OC'} > 0 \Leftrightarrow$  La souche est dégagée.  $\Leftrightarrow$  Les nœuds sont démêlés.

<sup>\*16</sup> D'ici jusqu'au paragraphe 3.1.7, Desargues prouve que, si sept points alignés  $A, A', B, B', C, C'$  et  $O$  satisfont à la condition de l'arbre (2.6.1), alors

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{B'C} \times \overline{B'C'}}{\overline{BC} \times \overline{BC'}} = \frac{\overline{B'A} \times \overline{B'A'}}{\overline{BA} \times \overline{BA'}}. \quad (3.1.1)$$

3.1.2 Car à cause de l'égalité d'être les rectangles de deux branches de chacune des trois couples  $\{OA, OA'\}$ ,  $\{OB, OB'\}$ ,  $\{OC, OC'\}$ , les quatre branches  $OB'$ ,  $OC'$ ,  $OC$ ,  $OB$  sont deux à deux proportionnelles, d'où suit que comme  $OB'$  est à  $OC'$ , ou bien  $OC$  est à  $OB$ , ainsi  $B'C$  est à  $BC'$ , et que comme  $OC'$  est à  $OB$ , ou bien  $OB'$  est à  $OC$ , ainsi  $B'C'$  est à  $BC$ .

3.1.3 Conséquemment la branche  $OB'$  est à son accouplée la branche  $OB$ , en raison même que la composée des raisons du brin  $B'C$  au brin  $BC'$  et du brin  $B'C'$  au brin  $BC$ , qui est la raison du rectangle des brins de la couple  $\{B'C, B'C'\}$  au rectangle des brins de sa relative, la couple  $\{BC, BC'\}$ .

3.1.4 D'où suit que le rectangle des brins  $\{B'A, B'A'\}$ , jumeau du rectangle  $\{B'C, B'C'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{B'C, C'B'\} \rangle$  est à son relatif le rectangle  $\{BA, BA'\}$ , jumeau du rectangle  $\{BC, BC'\}$ , comme le rectangle  $\{B'C, B'C'\}$ , jumeau de ce rectangle  $\{B'A, B'A'\}$ , est à son relatif le rectangle  $\{BC, BC'\}$ , jumeau du rectangle  $\{BA, BA'\}$ ,

3.1.5 Car de ce qui est démontré, le rectangle des deux brins de la couple  $\{B'A, B'A'\}$  est à son relatif le rectangle  $\{BA, BA'\}$ , comme la branche  $OB'$  est à son accouplée  $OB$ .

3.1.6 Davantage il est aussi démontré que le rectangle des brins  $\{B'C, B'C'\}$  est à son relatif le rectangle  $\{BC, BC'\}$ , comme la même branche  $OB'$  est à sa même accouplée  $OB$ .

---

En effet, avec  $\overline{OB} \times \overline{OB'} = \overline{OC} \times \overline{OC'}$ , on a

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'} - \overline{OC}}{\overline{OC'} - \overline{OB}} = -\frac{\overline{B'C}}{\overline{BC'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{OC'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC'} - \overline{OB'}}{\overline{OB} - \overline{OC}} = -\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}, \quad (3.1.2)$$

donc

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}} \times \frac{\overline{OC'}}{\overline{OB}} = \left(-\frac{\overline{B'C}}{\overline{BC'}}\right) \times \left(-\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}\right) = \frac{\overline{B'C} \times \overline{B'C'}}{\overline{BC} \times \overline{BC'}}.$$

De même,

$$\overline{OB} \times \overline{OB'} = \overline{OA} \times \overline{OA'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{B'A} \times \overline{B'A'}}{\overline{BA} \times \overline{BA'}}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. A propos des relations (3.1.2), remarquons que Desargues se sert de la proposition V.19 des *Éléments* d'Euclide, à savoir :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d},$$

et que ces relations permettent de construire la *souche* d'un *arbre* avec une règle et un compas, quand deux couples de *neuds* sont données. Voir la section 3.3.



3.1.7 Partant le rectangle  $\{B'A, B'A'\}$ , jumeau du rectangle  $\{B'C, B'C'\}$ , est à son relatif le rectangle  $\{BA, BA'\}$ , comme le rectangle  $\{B'C, B'C'\}$  est à son relatif le rectangle  $\{BC, BC'\}$ .

3.1.8 D'où suit qu'aussi le rectangle des brins  $\{C'B, C'B'\}$  est à son relatif le rectangle  $\{CB, CB'\}$ , comme le rectangle  $\{C'A, C'A'\}$  est à son relatif le rectangle des brins  $\{CA, CA'\}$ , savoir est comme la branche  $OC'$  est à son accouplée  $OC$  <sup>\*17</sup>.

3.1.9 D'où suit aussi que le rectangle des brins  $\{A'B, A'B'\}$  est à son relatif le rectangle  $\{AB, AB'\}$ , comme le rectangle  $\{A'C, A'C'\}$  est à son relatif le rectangle des brins  $\{AC, AC'\}$ , savoir est comme la branche  $OA'$  est à son accouplée  $OA$  <sup>\*18</sup>.

3.1.10 Et quand en une droite  $OA'$ , il y a comme cela trois couples de points  $\{A, A'\}$ ,  $\{B, B'\}$ ,  $\{C, C'\}$ , ainsi conditionnées ; à savoir que les deux points de chacune des couples soient de même ou mêlés, ou démêlés aux deux points de chacune des autres couples ; et que les rectangles ainsi relatifs des pièces d'entre ces points soient entre eux comme leurs jumeaux, pris de même ordre ; une telle disposition  $\leftarrow$  «pris de même ordre, sont entre eux une telle disposition» de ces trois couples de points en une droite, est ici nommée **involution** <sup>\*19</sup>.

3.1.11 C'est-à-dire qu'alors qu'il est ici dit que trois couples cotées de points en une droite sont disposées en involution ; cela veut dire qu'en cette disposition de ces trois couples de points, se trouvent toutes les conditions et propriétés qui viennent d'être

\*17 Pareillement

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{C'B \times C'B'}{CB \times CB'} = \frac{C'A \times C'A'}{CA \times CA'}. \quad (3.1.3)$$

\*18 Pareillement

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B \times A'B'}{AB \times AB'} = \frac{A'C \times A'C'}{AC \times AC'}. \quad (3.1.4)$$

\*19 DÉFINITION II Étant donnés sur une droite trois couples de points  $\{A, A'\}$ ,  $\{B, B'\}$  et  $\{C, C'\}$ , ces six points sont en *involution* entre eux, s'ils vérifient :

$$\begin{aligned} \frac{A'B \times A'B'}{AB \times AB'} &= \frac{A'C \times A'C'}{AC \times AC'}, & \frac{B'C \times B'C'}{BC \times BC'} &= \frac{B'A \times B'A'}{BA \times BA'} \\ \text{et} \quad \frac{C'A \times C'A'}{CA \times CA'} &= \frac{C'B \times C'B'}{CB \times CB'}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

expliquées des nœuds d'un arbre en chacune des deux espèces de conformation, ou que ces trois couples de points sont trois couples de nœuds en un arbre de l'une des deux espèces de conformation expliquées ci-devant \*20.

### 3.2 Couples de nœuds ne constituant pas d'involution

3.2.1 D'où suit d'abondant que quand en une droite comme  $OA'$ , quatre pièce comme  $OB'$ ,  $OC''$ ,  $OC$ ,  $OB$ , ne sont pas deux à deux proportionnelles, ou que les rectangles ne sont pas égaux entre eux des deux pièces de ces deux couples  $\{OB, OB'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{OB', OB\}, \rangle$   $\{OC, OC''\}$ , quoique leur bout commun  $O$  soit de même engagé ou dégagé aux deux pièces de chacune de ces deux couples  $\{OB, OB'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{OB', OB\}, \rangle$   $\{OC, OC''\}$ , la quelconque de ces pièces  $OB'$  n'est pas à son accouplée  $OB$  comme le rectangle  $\{B'C, B'C''\}$  est à son relatif le rectangle  $\{BC, BC''\}$ , et la conformation d'un arbre n'y est point.

3.2.2 Car puisque ces quatre pièces  $OB'$ ,  $OC''$ ,  $OC$ ,  $OB$ , ne sont pas proportionnelles entre elles, aussi les rectangles ne sont pas égaux entre eux de chacune des couples de pièces  $\{OB, OB'\}$ ,  $\{OC, OC''\}$  \*21.  $\leftarrow \langle \{OC'', OC\}, \{OB', OB\} \rangle$

3.2.3 Soit donc prise la droite  $OC'$  pour couplée à la droite quelconque d'elles  $OC$ , en façon que les rectangles soient égaux entre eux de chacune des couples de pièces  $\{OB, OB'\}$ ,  $\{OC, OC'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{OB', OB\}, \{OC', OC\} \rangle$  || cette pièce ainsi prise  $OC'$  est inégale à la 5 pièce  $OC''$ , et le point  $C'$  est séparé du point  $C''$ ; partant il n'y a pas même raison de la pièce  $C'B$  à la pièce  $C'B'$ , que de la pièce  $C''B$  à la pièce  $C''B'$ .

3.2.4 Ainsi la raison de la pièce  $OB'$  à son accouplée  $OB$ , qui est la raison du rectangle des pièce  $\{B'C, B'C''\}$  au rectangle des pièce  $\{BC, BC''\}$ , n'est pas la même raison que du rectangle des pièce  $\{B'C, B'C''\}$  au rectangle des pièce  $\{BC, BC''\}$ ; et partant sinon

\*20 THÉORÈME I La notion d'arbre est é équivalente à celle d'involution.

Notons que parmi de nombreux termes inventés par Desargues, d'inspiration curieusement botanique, celui d'involution est le seul qui soit actuellement en cours dans les mathématiques.

\*21

$$\overline{OB} \times \overline{OB'} \neq \overline{OC} \times \overline{OC''} \Leftrightarrow \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \neq \frac{\overline{B'C} \times \overline{B'C''}}{\overline{BC} \times \overline{BC''}}.$$

que les quatre pièces  $OB'$ ,  $OC''$ ,  $OC$ ,  $OB$ , des deux couples  $\{OB, OB'\}$ ,  $\{OC, OC''\}$ ,  $\leftarrow \langle OB', OC', OC, OB, \text{des deux couples } \{OB, OB'\}, \{OC', OC''\} \rangle$  soient deux à deux proportionnelles, elles ne constituent pas un arbre des espèces de conformation expliquée ci-devant. Et la quelconque des pièces  $OB'$  n'est pas à son accouplée  $OB$ , comme le rectangle des deux pièce  $\{B'C, B'C''\}$  est au rectangle des pièce  $\{BC, BC''\}$ , comme nécessairement il advient quand ces quatre pièces sont proportionnelles entre elles comme  $OB', OC', OC, OB$ .  $\leftarrow \langle \text{entre elles} \rangle$

### 3.3 Construction de la souche

3.3.1 D'où suit qu'étant données de position deux couples de nœuds  $\{B, B'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{B', B\} \rangle$ ,  $\{C, C'\}$ , en un arbre  $OA'$ , la souche  $O$  de même est donnée de position, et cela revient à ce que la somme ou la différence et la raison d'entre deux quantités étant données, chacune de ces deux quantités est donnée de grandeur <sup>\*22</sup>.

3.3.2 Car ayant premièrement engagé ou dégagé cette souche  $O$  aux nœuds  $\leftarrow \langle \text{d'entre les nœuds} \rangle$  de chacune de ces couples  $\{B, B'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{B', B\} \rangle$ ,  $\{C, C'\}$ , selon que les nœuds d'une des couples sont ou mêlés, ou démêlés aux nœuds de l'autre couple ;

3.3.3 Puis fait la branche  $OB'$  à son adjointe la branche  $OC'$ , ou bien la branche  $OC$  à son adjointe la branche  $OB$ , comme le brin  $B'C$  est à son semblable le brin  $BC'$  ;  $\leftarrow \langle C'B \rangle$

3.3.4 De là suit que la branche  $OC$  est à la branche  $OB$ , comme la branche  $OB'$  est à la branche  $OC'$ , conséquemment les rectangles sont égaux entre eux des branches de chacune des deux couples  $\{OB, OB'\}$  moyennes,  $\{OC, OC'\}$  extrêmes ;  $\leftarrow \langle \{OB', OB\}$  mitoyennes,  $\{OC', OC\}$  extrêmes  $\rangle$

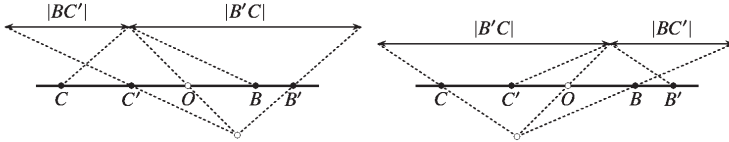
3.3.5 Partant la quelconque de ces branches  $OB'$  est à son accouplée  $OB$ , comme

<sup>\*22</sup> Deux couples de nœuds  $\{B, B'\}$ ,  $\{C, C'\}$  étant données, la souche  $O$  de l'arbre est constructible selon les relations (3.1.2), c'est-à-dire :

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{BC'}} = -\frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}} = -\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}, \quad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = -\frac{\overline{OC'}}{\overline{OB}} = -\frac{\overline{OB'}}{\overline{OC}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{OB} \times \overline{OB'} = \overline{OC} \times \overline{OC'}.$$

Voir la note en bas du paragraphe 3.1.1.

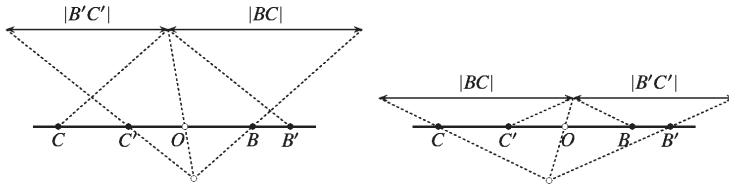
le rectangle des brins  $\{B'C, B'C'\}$  est au rectangle des brins  $\{BC, BC'\}$  ; donc  $O$  est la souche de l'arbre dont  $\{B, B'\}, \leftarrow \langle \{B', B\}, \rangle \{C, C'\}$  sont deux couples de nœuds.



3.3.6 Ou bien encore, ayant puis fait la branche  $OC'$  à son adjointe la branche  $OB$ , ou bien la branche  $OB'$  à son adjointe la branche  $OC$ , comme le brin  $B'C'$  est à son semblable le brin  $BC$  ;

3.3.7 Suit que la branche  $OB'$  est à la branche  $OC'$ , comme la branche  $OC$  est à la branche  $OB$ , conséquemment les rectangles sont égaux entre eux des branches de chacune des deux couples  $\{OB, OB'\}$  et  $\{OC, OC'\}$  ;  $\leftarrow \langle \{OB', OB\}, \{OC', OC\} \rangle$

3.3.8 Conséquemment la quelconque de ces branches  $OB'$  est à son accouplée  $OB$ , comme le rectangle des brins  $\{B'C, B'C'\}$  est au rectangle des brins  $\{BC, BC'\}$  ; donc  $O$  est la souche de l'arbre dont  $\{B, B'\}, \leftarrow \langle \{B', B\}, \rangle \{C, C'\}$  sont deux couples de nœuds.



3.3.9 Et en passant, puisque les semblables massifs ou solides, compris de faces, flancs ou côtés opposés, plats et parallèles, sont entre eux en raison même que la composée de la raison d'entre leurs bases et de la raison d'entre leurs hauteurs, il suit de ce qui est démontré que le massif ou solide de la quelconque de ces branches  $OB'$ ,  $\leftarrow \langle B'O, \rangle$  en chacun des brins couplés qu'elle porte,  $\Leftarrow \langle \text{brins couplés}, \rangle \{B'C, B'C'\}$ , est au semblable massif ou solide de son accouplée la branche  $OB$ , en chacun des brins couplés qu'elle porte,  $\Leftarrow \langle \text{brins couplés}, \rangle \{BC, BC'\}$ , relatifs à la couple  $\{B'C, B'C'\}$ , en raison doublée de

cette quelconque branche  $OB'$  à son accouplée  $\leftarrow$  (à cette son accouplée)  $OB$  <sup>\*23</sup> ; et ce qui s'en peut davantage déduire.

## 4 Involution de quatre points

### 4.1 Nœud moyen simple / double

4.1.1 De ce que devant, il est encore évident qu'en l'espèce de conformation d'arbre où la souche est engagée entre les deux branches ou nœuds de la quelconque des couples, les deux nœuds moyens qu'y donne une couple de branches, y sont séparés l'un de l'autre, et qu'ainsi chacun d'eux est seul, et pour cette raison il est ici nommé ***nœud moyen simple***.

4.1.2 Et quand en cette espèce d'arbre, il y a deux couples de branches moyennes, lesquelles donnent chacune une couples de nœuds moyens simples, chacun des nœuds moyens simples de la quelconque de ces deux couples, se trouve uni avec un des nœuds aussi moyen et simple de l'autre couple ; et pour cette raison il y aura deux cotes diverses auprès du quelconque de ces nœuds moyens simples.

4.1.3 Mais pour des considérations, ce cas de deux couples de branches moyennes avec une troisième couple de branches extrêmes en un arbre de l'espèce où la souche est engagée entre les branches d'une couple, ne sera pas encore ici compris aux événements qui constituent une involution de trois couples de nœuds entre elles <sup>\*24</sup> ; aussi bien y a-t-il d'ailleurs beaucoup à revoir, ajuster, expliquer, ordonner, transposer, retrancher, augmenter et nettoyer mieux en ce *Brouillon projet* ; et ces deux couples de branches

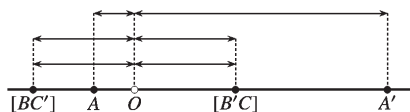
---

\*23 De (3.1.1) se déduit :

$$\frac{\overline{OB'} \times (\overline{B'C} \times \overline{B'C'})}{\overline{OB} \times (\overline{BC} \times \overline{BC'})} = \left( \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \right)^2.$$

\*24 Un des inconvénients : soient  $\{B, B'\}$  et  $\{C, C'\}$  deux couples de *nœuds moyens simples*, telles que  $B$  s'unisse à  $C'$ , et  $B'$  à  $C$  ; alors la fraction  $(\overline{B'C} \times \overline{B'C'}) / (\overline{BC} \times \overline{BC'})$  est dépourvue de sens, le dénominateur étant 0. En fait, Desargues considère certains aspects de ce cas dans la section 4.4.

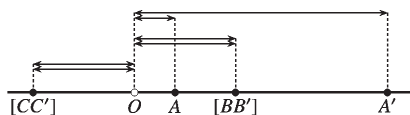
moyennes ensemble ne donnent que les mêmes nœuds moyens d'une seule d'elle.  $\Leftarrow$  (en ce Brouillon projet.)



4.1.4 Mais quand en un arbre, la souche se trouve dégagée d'entre les deux branches ou deux nœuds de la quelconque des couples, les deux nœuds moyens que donne une couple  $\Leftarrow$  (donnent une couple) de branches moyennes sont unis ensemble à un même point ou nœud, qui pour cette raison est ici nommé **nœud moyen double**, et peut au besoin être coté d'une seule cote, entendue redoublée ou prise deux fois..

4.1.5 Et quand en cette espèce d'arbre, il y a deux couples de ces branches moyennes, une d'une part et l'autre de l'autre part de la souche, chacune de ces branches moyennes || donne au tronc de l'arbre  $\Leftarrow$  (ces branches moyennes, chacune d'elles y donne) un de ces nœuds 6 moyens doubles, l'un d'une part, l'autre de l'autre part de la souche.

4.1.6 Et en cette espèce de conformation d'arbre où la souche est dégagée d'entre les branches d'une couple, ce cas de deux couples de branches moyennes avec une troisième couple de branches extrêmes, est ici compris aux événements qui constituent une involution de trois couples de nœuds entre elles, où chacun des deux nœuds moyens doubles est considéré comme une couple de nœuds unis en un point.



## 4.2 Nœud extrême intérieur / extérieur

4.2.1 Or en l'une et l'autre espèce de conformation d'arbre, les deux nœuds que donnent les deux branches extrêmes d'une même couple, y sont nommés **nœuds extrêmes**.

4.2.2 Des deux nœuds extrêmes d'une couple  $\{A, A'\}$ , l'un  $A$  est autour de la souche entre les deux nœuds moyens simples ou doubles, l'autre de ces nœuds extrêmes  $A'$  de la même couple est hors d'entre les mêmes deux nœuds moyens simples ou doubles,

4.2.3 Celui des nœuds extrêmes  $A$  d'une couple  $\{A, A'\}$ , qui est entre les nœuds moyens simples ou double de l'arbre, est ici nommé *nœud extrême intérieur*.

4.2.4 Celui des nœuds extrêmes  $A'$  d'une couple  $\{A, A'\}$ , qui est hors d'entre les nœuds moyens simples ou double de l'arbre, est ici nommé *nœud extrême extérieur*.

### 4.3 Infiniment grand en involution

4.3.1 En chacune des deux espèces de conformation d'arbre, d'autant que la petite d'une couple de branches extrêmes est plus courte qu'une des branches moyennes, d'autant la grande de cette couple de branches extrêmes est à proportion plus longue que la même branche moyenne. Et au rebours.

4.3.2 Ou bien, d'autant plus que le nœud intérieur  $A$  d'une couple de nœuds extrêmes est proche de la souche  $O$ , d'autant plus le nœud extérieur  $A'$  de la même couple de nœuds extrêmes  $\{A, A'\}$  est éloigné de la même souche  $O$ . Et au rebours.

4.3.3 Ainsi pendant que le nœud intérieur  $A$  d'une couple d'extrêmes est disjoint ou désuni à la souche de l'arbre, le nœud extérieur de la même couple est au tronc à distance finie. Et au rebours.

4.3.4 Et quand le nœud intérieur d'une couple d'extrêmes est joint ou bien uni à la souche de l'arbre, le nœud extérieur de la même couple est au tronc à distance infinie. Et au rebours.

4.3.5 Voilà comme en un arbre, la souche, et le tronc depuis la même souche jusqu'à l'infini d'une ou d'autre part d'elle, y sont entre eux une couple de branches extrêmes, dont la petite est appetitessée  $\Leftarrow$  (est à petitessée) jusqu'à la souche, et la grande est allongée à l'infini.

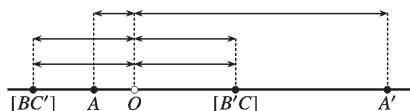
4.3.6 Voilà de plus comme la même souche et la distance infinie sont encore en

l'arbre une couple de nœuds extrêmes, dont la souche est l'intérieur et la distance infinie est l'extérieur, et qui, avec deux quelconques autres diverses couples de branches, constituent une involution <sup>\*25</sup>.

4.3.7 Or l'événement de semblables espèces de conformation d'arbre est fréquent aux figures qui viennent de la rencontre d'un cône avec des plans en certaine disposition entre eux <sup>\*26</sup>.

#### 4.4 Involution à deux couples de nœuds moyens simples

4.4.1 Et en l'espèce de conformation d'arbre où la souche  $O$  se trouve engagée entre les deux branches d'une couple  $\{OB, OB'\}$ , lorsqu'il s'y rencontre deux couples de branches moyennes  $\{OB, OB'\}$ ,  $\{OC, OC'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{OB', OB\}, \{OC', OC\}, \rangle$  et que le quelconque des nœuds moyens simples  $B'$  d'une couple  $\{OB, OB'\}$  est uni à un des nœuds moyens simple  $C$  de l'autre couple  $\{OC, OC'\}$ , en ce cas il y a nombre de propriétés particulières.



4.4.2 Car, puisque les rectangles sont égaux entre eux de chacune des trois couples de branches, à savoir des deux couples de moyennes  $\{OC, OC'\}$  et  $\{OB, OB'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{OC, OC'\}, \{OB, OB'\} \rangle$  et de la couple d'extrêmes  $\{OA, OA'\}$ , c'est-à-dire que les trois couples de nœuds, deux de moyens simples  $\{C, C'\}$  et  $\{B, B'\}$ , et une d'extrêmes  $\leftarrow \langle$  une d'extrême  $\rangle \{A, A'\}$ , sont disposées entre elles comme involution ; il est premièrement évident que

<sup>\*25</sup> AXIOME II L'infiniment grand, couplé avec 0, peut constituer une involution avec d'autres grandeurs ordinaires couplées.

L'infiniment grand s'identifie au point idéal, postulé par l'AXIOME I, qui se trouve à distance infinie, là où se rencontrent les parallèles.

<sup>\*26</sup> L'existence du second foyer de la parabole à distance infinie, découverte par Kepler en 1614 (*Ad Vitellionem paralipomena*), assure la continuité des trois sections coniques : l'ellipse, la parabole et l'hyperbole, et rend possible de les expliquer comme trois espèces d'un même genre, ce qui est l'enjeu de ce *Brouillon projet*.



chacune de ces branches moyennes est égale à chacune des trois autres, et est moyenne proportionnelle aux deux branches d'une quelconque couple d'extrêmes  $\{OA, OA'\}$ .

4.4.3 Davantage, comme le rectangle des brins  $\{B'C, B'C'\}$  est à son relatif le rectangle  $\{BC, BC'\}$ , aussi le rectangle des brins  $\{B'A, B'A'\}$ , jumeau du rectangle  $\{B'C, B'C'\}$ , est à son relatif le rectangle  $\{BA, BA'\}$ , jumeau du rectangle  $\{BC, BC'\}$ .

4.4.4 Et en changeant, le rectangle  $\{B'C, B'C'\}$  est à son jumeau le rectangle  $\{B'A, B'A'\}$ , comme le rectangle  $\{BC, BC'\}$ , relatif du rectangle  $\{B'C, B'C'\}$ , est à son jumeau le rectangle  $\{BA, BA'\}$ .

4.4.5 Or il est évident qu'en ce cas le rectangle des brins  $\{B'C, B'C'\}$  est égal au rectangle des brins  $\{BC, BC'\}$ , partant aussi le rectangle des brins  $\{B'A, B'A'\}$  est égal au rectangle des brins  $\{BA, BA'\}$  <sup>\*27</sup>.

4.4.6 Ce qui d'ailleurs est encore évident, car de l'hypothèse et de ce qui est ici démontré, suit que le brin  $BA'$  est à son semblable le brin  $B'A$ ,  $\leftarrow \langle AB' \rangle$  comme le brin  $B'A'$  est à son semblable le brin  $BA$ ,  $\leftarrow \langle AB \rangle$  partant le rectangle des deux brins moyens  $\leftarrow \langle \text{mitoyens} \rangle \{B'A, B'A'\}$  est égal au rectangle des brins  $\{BA, BA'\}$  <sup>\*28</sup>.

4.4.7 Ou bien encore comme la branche  $OB'$  est à son accouplée  $OB$ , ainsi le rectangle des brins  $\{B'A, B'A'\}$  est à son relatif le rectangle  $\{BA, BA'\}$  ; donc la branche

<sup>\*27</sup> PROPOSITION 4.4.1 Soient  $O, A, A', B$  et  $B'$  cinq points sur une droite tels que  $\overline{OA} \times \overline{OA'} = -|\text{OB}|^2$  et  $\overline{OB} = -\overline{OB'}$  ; alors

$$\overline{B'A} \times \overline{B'A'} = -(\overline{BA} \times \overline{BA'}) . \quad (4.4.1)$$

Desargues la prouve de trois façons. Première démonstration. Par le THÉORÈME I,

$$\frac{\overline{B'C} \times \overline{B'C'}}{\overline{BC} \times \overline{BC'}} = \frac{\overline{B'A} \times \overline{B'A'}}{\overline{BA} \times \overline{BA'}} \Rightarrow \frac{\overline{B'C} \times \overline{B'C'}}{\overline{B'A} \times \overline{B'A'}} = \frac{\overline{BC} \times \overline{BC'}}{\overline{BA} \times \overline{BA'}} , \quad \text{et} \quad \overline{B'C} \times \overline{B'C'} = \overline{BC} \times \overline{BC'} ,$$

donc

$$\overline{B'A} \times \overline{B'A'} = \overline{BA} \times \overline{BA'} ,$$

ce qui n'est pas exacte. En effet, ce raisonnement nous semble défectueux,  $\overline{BC'}$  et  $\overline{B'C'}$  étant ' par l'hypothèse.

<sup>\*28</sup> Deuxième démonstration. Par la proposition V.19 des *Éléments* d'Euclide (voir la note du paragraphe 3.1.1),

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{OB} - \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{B'A'}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{OB'} - \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} ,$$

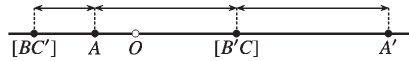
donc

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{B'A}} = -\frac{\overline{B'A'}}{\overline{BA}} \Rightarrow \overline{B'A} \times \overline{B'A'} = -(\overline{BA} \times \overline{BA'}) .$$

$OB'$  étant égale à son  $\parallel$  accouplée  $OB$ , le rectangle  $\{B'A, B'A'\}$  est égal à son relatif 7  
le rectangle  $\{BA, BA'\}$  <sup>\*29</sup>. Ce qui est incompréhensible quand le nœud intérieur  $A$  de la  
couple des extrêmes  $\{A, A'\}$  se trouve uni à la souche  $O$ , et que le nœud extérieur  $A'$  de  
la même couple d'extrêmes est à distance infinie.

4.4.8 De manière qu'en ce cas, il advient que trois couples de nœuds  $\{A, A'\}$ ,  $\{B, B'\}$ ,  
 $\{C, C'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{C, C'\}, \{B, B'\}, \{A, A'\} \rangle$  sont réduites à ne donner que deux couples de points  
au tronc, desquels une couple  $\{A, A'\}$  est de nœuds extrêmes, et chacun des points de  
l'autre couple représente deux nœuds moyens simples de deux diverses couples.

4.4.9 Et ces deux couples de points donnent aux tronc trois pièces consécutives  $[BC']$   
 $A$ ,  $A[B'C]$ ,  $[B'C]A' \leftarrow \langle [C'B]A, A[C'B'], [C'B']A' \rangle$  dont la somme  $[BC']A' \leftarrow \langle [C'B]A \rangle$  est  
à la pièce moyenne  $A[B'C]$ ,  $\leftarrow \langle \text{mitoyenne } [B'C]A \rangle$  comme la pièce du bout de la part du  
nœud extrême extérieur  $[B'C]A'$  est à la pièce de l'autre bout de la part du nœud extrême  
intérieur  $[BC']A$  <sup>\*30</sup>  $\leftarrow \langle [C'B]A \rangle$ .



4.4.10 De façon qu'alors qu'en cette espèce de conformation d'arbre où la souche  
est engagée, quand il y a deux couples de branches moyennes, et que le nœud extrême  
intérieur est désuni de la souche, ou que le nœud extrême extérieur est à distance finie ;  
c'est-à-dire que trois semblables couples de nœuds n'y donnent ainsi que deux couples  
de points au tronc, qui donnent trois pièces ainsi consécutives ; en ce cas la pièce

<sup>\*29</sup> Troisième démonstration. Par le THÉORÈME I,

$$\frac{\overline{B'A} \times \overline{B'A'}}{\overline{BA} \times \overline{BA'}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = -1 \Rightarrow \overline{B'A} \times \overline{B'A'} = -(\overline{BA} \times \overline{BA'}).$$

<sup>\*30</sup> Une interprétation de (4.4.1).

$$\overline{B'A} \times \overline{B'A'} = -(\overline{BA} \times \overline{BA'}) \Rightarrow \frac{\overline{BA'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{BA}},$$

cela signifie que

$$\frac{\text{somme des trois pièces}}{\text{pièce moyenne}} = \frac{\text{pièce du bout de la part du nœud extrême extérieur}}{\text{pièce du bout de la part du nœud extrême intérieur}}.$$

moyenne  $\leftarrow \langle \text{mitoyenne} \rangle$  est inégale à chacune des pièces des bouts, et de la part du nœud extrême extérieur <sup>\*31</sup>, et de la part du nœud extrême intérieur.

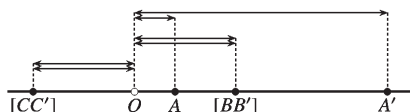
4.4.11 Et lorsque le nœud extrême intérieur est uni à la souche, ou que le nœud extrême extérieur est à distance infinie, en ce cas la pièce moyenne  $\leftarrow \langle \text{mitoyenne} \rangle$  de ces trois consécutives est égale à celle des pièces du bout qui est de la part du nœud extrême intérieur <sup>\*32</sup>.

4.4.12 Il y a nombre d'autre propriétés particulières à ce cas de cette espèce de conformation d'arbre, où chacun peut s'égayer à sa fantaisie, mais il n'est pas encore ici du nombre de ceux qui constituent une involution.

## 4.5 Involution à deux couples de nœuds moyens doubles

4.5.1 Et partant, touchant l'autre espèce de conformation d'arbre où la souche  $O$  se trouve dégagée d'entre les branches d'une même couple.

4.5.2 Quand il y a deux couples de branches moyennes  $\{OB, OB'\}$ ,  $\{OC, OC'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{OC', OC\} \rangle$  l'une d'une part et l'autre de l'autre part de la souche  $O$ , et  $\leftarrow \langle \{OB, OB'\}, \{OC', OC\} \rangle$  une couple de branches extrêmes  $\{OA, OA'\}$ , en involution, et qui pour trois couples de nœuds donnent au tronc seulement deux couples de points ; outre que cette espèce a de commun avec l'autre espèce de conformation d'arbre où la souche est engagée, qu'il n'est pas nécessaire de redire, il y a d'autres particulières propriétés évidentes à l'abord.



<sup>\*31</sup> Ce qui n'est pas vrai. Par exemple, si les quatre points  $A, A', B$  et  $B'$  sont tels que

$$\overline{OB} = -1, \quad \overline{OB'} = 1, \quad \overline{OA} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \overline{OA'} = 1 + \sqrt{2},$$

alors  $\overline{AB'} = \overline{B'A'} = \sqrt{2}$ .

<sup>\*32</sup> Si  $A$  se trouve à la souche, alors évidemment  $\overline{BA} = \overline{BA'}$ .

4.5.3 Comme que la grande des branches extrêmes  $OA'$  est à la quelconque des branches moyennes  $OB'$ , et la quelconque des branches moyennes  $OB'$  est à la petite extrême  $OA$ , comme le brin  $A'B'$  est au brin  $AB'$ , c'est-à-dire en raison moitié de la raison du rectangle des brins  $\{A'B, A'B'\}$  au rectangle des brins  $\{AB, AB'\}$ .

4.5.4 Et puisque par ce qui est démontré d'un arbre, le rectangle des brins  $\{A'C, A'C'\} \leftarrow \langle \{A'C, A'C'\} \rangle$  est à son relatif le rectangle  $\{AC, AC'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{AC, AC'\} \rangle$  comme le rectangle  $\{A'B, A'B'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{A'B, A'B'\} \rangle$  jumeau du rectangle  $\{A'C, A'C'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{A'C, A'C'\} \rangle$  est à son relatif le rectangle  $\{AB, AB'\}$ , jumeau du rectangle  $\{AC, AC'\}$  ;  $\Leftarrow \langle \{A'C, A'C'\} \rangle$  et que les brins  $\{AC, AC'\} \leftarrow \langle \{AC, AC'\} \rangle$  sont égaux entre eux, et les brins  $\{A'C, A'C'\} \leftarrow \langle \{A'C, A'C'\} \rangle$  sont égaux entre eux, et que de même les brins  $\{A'B, A'B'\} \leftarrow \langle \{A'B, A'B'\} \rangle$  sont égaux entre eux, et les brins  $\{AB, AB'\} \leftarrow \langle \{AB, AB'\} \rangle$  sont égaux entre eux ; suit que le brin  $A'B'$  est au brin  $AB'$ , comme le brin  $A'C'$  est au brin  $AC'$  \*33.

4.5.5 De là suit que la grande des branches extrêmes  $OA'$  est à la quelconque des branches moyennes  $OB'$  ou  $OC'$ , et la quelconque des branches moyennes  $OB'$  ou  $OC'$  est à la petite des branches extrêmes  $OA$ , en raison aussi moitié de la raison du rectangle  $\{A'C, A'C'\} \leftarrow \langle \{A'C, A'C'\} \rangle$  au rectangle  $\{AC, AC'\}$ ,  $\leftarrow \langle \{AC, AC'\} \rangle$  c'est-à-dire, et comme le brin  $C'A'$  est au brin  $C'A$ , et comme le brin  $B'A'$  est au brin  $B'A$  ; et à l'envers, changeant et alternement, divisant, composant et le reste.

---

\*33 PROPOSITION 4.5.1 Soient  $O, A, A', B, B', C$  et  $C'$  sept points sur une droite tels que  $\overline{OA} \times \overline{OA'} = |\overline{OB}|^2 = |\overline{OC}|^2$ ,  $\overline{OB} = \overline{OB'}$  et  $\overline{OC} = \overline{OC'}$  ; alors

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB'}} = -\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC'}}.$$

Démonstration. par l'hypothèse  $\overline{OB} = \overline{OB'}$ ,

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} \Rightarrow \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \times \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = \left( \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \right)^2 = \left( \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} \right)^2,$$

donc

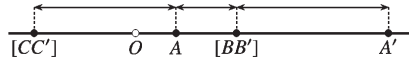
$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = \sqrt{\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}} = \sqrt{\frac{\overline{A'B} \times \overline{A'B'}}{\overline{AB} \times \overline{AB'}}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB'}}.$$

De même,

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OA}} = \sqrt{\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}} = -\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC'}},$$

d'où la conclusion.

4.5.6 C'est-à-dire qu'en cette espèce de conformation d'arbre à la souche dégagée, et au cas de ces deux couples de branches ainsi moyennes  $\leftarrow \langle$  de deux couples de branches moyennes  $\rangle$  avec une couple quelconque de la branches extrêmes, ces trois couples de branches-là donnent au tronc, sous quatre points  $[CC']$ ,  $A$ ,  $[BB']$ ,  $A'$ ,  $\leftarrow \langle [C'C]$ ,  $A$ ,  $[BB']$ ,  $A' \rangle$  trois pièce consécutives  $[CC']A$ ,  $\leftarrow \langle [C'C]A \rangle$ ,  $A[BB']$ ,  $[BB']A'$ , en façon que celle de l'un des bouts quelconque  $[BB']A' \leftarrow \langle A[BB'] \rangle$  est à la moyenne  $A[BB']$ ,  $\leftarrow \langle$  mitoyenne  $[BB']A' \rangle$  comme la somme des trois ensemble  $[CC']A' \leftarrow \langle A[C'C] \rangle$  est à celle de l'autre bout  $[CC']A$ ,  $\leftarrow \langle [C'C]A \rangle$ ; car alternativement à l'envers, aussi  $\leftarrow \langle$  à l'envers aussi  $\rangle [CC']A$  est à  $A[BB']$  comme  $[CC']A' \leftarrow \langle A[C'C] \rangle$  est à  $[BB']A' \text{ }^{*34}$ ;  $\leftarrow \langle A[BB'] \rangle$ ; et de la suite changeant, disant, composant, et ce qui s'en suit.



## 4.6 Nœuds correspondants

4.6.1 Et dans ce même cas est évidemment compris l'événement de ces deux couples de branches ainsi moyennes,  $\leftarrow \langle$  de deux couples de branches moyennes  $\rangle$  avec la souche et le tronc depuis elle jusqu'à l'infini d'une part pour couple de branches extrêmes, qui donnent deux nœuds moyens doubles, chacun pour une couple de nœuds moyens, et la même souche avec la distance infinie au tronc pour une autre troisième couple de nœuds extrêmes, le tout pour trois couples de nœuds en involution au tronc de l'arbre; auquel événement il est aisé de discerner les deux nœuds moyens doubles d'avec les deux nœuds de la  $\parallel$  couple d'extrêmes, en ce qu'ordinairement l'un des nœuds extrêmes 8

\*34 Une interprétation de (4.5.1).

$$\frac{A'B'}{AB'} = -\frac{A'C'}{AC'} \Rightarrow \frac{B'A'}{AB'} = \frac{C'A'}{C'A} \quad \text{ou} \quad \frac{B'A'}{C'A'} = \frac{AB'}{C'A},$$

cela signifie que

$$\frac{\text{pièce d'un bout}}{\text{pièce moyenne}} = \frac{\text{somme des trois pièces}}{\text{pièce de l'autre bout}}.$$

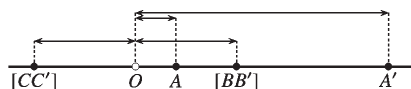
est entre les deux nœuds moyens doubles, ou qu'un des nœuds moyens doubles est entre les deux nœuds extrêmes, et ce cas d'involution est énoncé d'ordinaire en nommant premièrement les deux nœuds de la couple d'extrêmes en cette manière ; ces deux tels points sont couplés entre eux en involution avec deux tels autres points, où ces mots *sont couplés entre eux* emportent que ces deux points, ainsi couplés et séparés ou désunis d'ensemble, sont une couple de nœuds extrêmes ; d'où suit que n'y ayant que quatre points en ce cas d'involution, chacun des deux autres est un nœud moyen double, et conséquemment un des nœuds extrêmes est entre ces deux nœuds moyens doubles, ou bien un des nœuds moyens doubles est entre les deux nœuds extrêmes.

4.6.2 Davantage en ce même cas,  $\Leftarrow$  (Davantage) les deux nœuds moyens doubles sont ici nommés *nœuds correspondants* entre eux, et les deux nœuds extrêmes y sont aussi nommés *nœuds correspondants* entre eux.

4.6.3 Par où il est évident que les trois quelconques nœuds d'une semblable involution étant nommés et donnés de position, aussi le quatrième est donné de position comme il apparaîtra mieux encore en la suite <sup>\*35</sup>.

4.6.4 Et partant pour donner à entendre ce cas d'involution, il suffira de dire que tels quatre points sont en involution entre eux, ou que deux tels points sont couplés en involution avec deux tels autres points, en nommant les correspondants ensemble par couples.

4.6.5 Où toute la plus grande remarque à faire est, que ce cas d'involution en quatre points comporte comme deux espèce d'un genre : l'événement où quatre points en une droite, chacun à distance finie, y donnent trois pièces consécutives, dont celle d'un quelconque des bouts est à la moyenne  $\Leftarrow$  (mitoyenne) comme la somme des trois est à celle de l'autre bout.

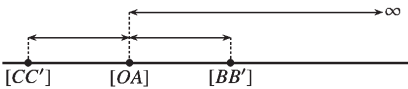


Et l'événement où trois points en une droite, chacun à distance finie, donnent deux

---

\*35 Voir la section 4.10.

pièces consécutives égales entre elles, savoir est lorsqu'en une droite, un point mipartit l'intervalle d'entre deux autres points,  $\leftarrow$  (lorsqu'un point mipartit l'intervalle droite d'entre deux autres points,) auquel rencontre ou événement, le point, de part et de l'autre duquel sont les pièces de droite égales entre elles, est souche, et davantage un nœud extrême, couplé à la distance infinie de la même droite en involution, avec les deux points des autres bouts de ces deux pièces égales, qui sont en ce cas chacun un nœud moyen double en involution.



4.6.6 Partant à ces mots *quatre points en involution*, on concevra comme de deux espèces d'un même genre, l'un ou l'autre de ces deux événements : à savoir l'un où quatre points en une droite, chacun à distance finie, y donnent trois pièces consécutives, dont la quelconque extrême est à la moyenne  $\leftarrow$  (moyenne) comme la somme des trois est à celle de l'autre bout. L'autre, où trois points à distance finie en une droite avec un quatrième à distance infinie, y donnent de même trois pièces, dont la quelconque extrême est à la moyenne  $\leftarrow$  (moyenne) comme la somme des trois est à l'autre extrême ; ce qui est incompréhensible et semble impliquer à l'abord, en ce que les trois points à distance finie donnent en ce cas deux pièces égales entre elles, par où le point du milieu se trouve et souche, et le nœud extrême, couplé à distance infinie.

4.6.7 Partant on observera soigneusement qu'une droite étant mipartie en un point et entendue allongée à l'infinie, c'est un des événements de l'involution en quatre points.

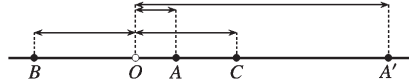
4.7 Souches réciproques

4.7.1 Or en ce même cas d'une involution en quatre points  $B, A, C, A'^{*36}$ ,  $\leftarrow (A', B, A, C)$

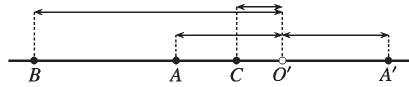
<sup>\*36</sup> D'ici jusqu'à la section 4.10, nous modifierons les cotes des points de la façon suivante :

la version de 1639	A	L	B	H	G	F
notre version	O	O'	A	A'	B	C

chacun à distance finie, comme les deux correspondants entre eux  $\{B, C\} \leftarrow \langle \{C, B\} \rangle$  sont chacun un nœud moyen double, et les autres deux aussi correspondants entre eux  $\{A, A'\}$  sont une couple de nœuds extrêmes au tronc d'un arbre, dont la souche  $O$  mipartit le brin  $BC$ .



4.7.2 Semblablement les deux points  $\{A, A'\} \leftarrow \langle \{A', A\} \rangle$  sont chacun un nœud moyen double, et les deux point  $\{B, C\}$  sont une couple de nœuds extrêmes d'un arbre, dont la souche  $O'$  mipartit le brin  $AA'$  <sup>\*37</sup>.



4.7.3 Car puisque  $AC$  est à  $AB$ , comme  $A'C$  est à  $A'B$ , c'est-à-dire que le rectangle  $\{CA, CA\}$  est au rectangle  $\{BA, BA\}$ , comme le rectangle  $\{CA', CA'\}$  est au rectangle  $\{BA', BA'\}$ .

4.7.4 Si davantage on considère les points  $\{B, C\}$  comme une couple de nœuds extrêmes, et chacun des point  $\{A, A'\} \leftarrow \langle \{B, A\} \rangle$  comme un nœud moyen double, alors ces trois couples de nœuds  $\{B, C\}, \leftarrow \langle \{C, B\} \rangle, \{A, A'\}, \{A', A'\}$ , qui sont en involution entre eux, sont évidemment démêlés entre elles.

4.7.5 Partant, ayant dégagé la souche de l'arbre  $O'$  d'entre les nœuds de chacune de ces trois couples, elle tombe évidemment entre les points  $A'$  et  $B$ .

4.7.6 De plus, ayant fait que comme le rectangle  $\{CA, CA\}$  est au rectangle  $\{BA, BA\}$ , ou bien comme le rectangle  $\{CA', CA'\}$  est au rectangle  $\{BA', BA'\}$ , ainsi la branche  $O'C$  soit à la branche  $O'B$ ; suivra de ce que dessus, que les rectangles sont égaux entre eux de

<sup>\*37</sup> PROPOSITION 4.7.1 Soient  $O$  et  $O'$  respectivement le milieu de  $BC$  et celui de  $AA'$ ; alors

$$\overline{OA} \times \overline{OA'} = |\overline{OB}|^2 = |\overline{OC}|^2 \Leftrightarrow |\overline{O'A}|^2 = |\overline{O'A'}|^2 = \overline{O'B} \times \overline{O'C}. \quad (4.7.1)$$



chacune des trois couples de branches  $\{O'B, O'C\}$ ,  $\leftarrow \langle \{O'C, O'B\}, \rangle \{O'A, O'A\}$ ,  $\{O'A', O'A'\}$ , et partant la souche  $O'$  mipartit le brin  $AA' \leftarrow \langle BC \rangle$  en un arbre, dont  $\{O'A, O'A\}$ ,  $\{O'A', O'A'\}$  sont chacune une couple de branches moyennes, et  $\{O'B, O'C\}$ , une coupe de branches extrêmes ; et ce qui s'en suit <sup>\*38</sup>.

4.7.7 De façon que quand en une droite, quatre points, chacun à distance finie, constituent une  $\parallel$  involution, chacun des points qui mipartit le brin d'entre chacun des deux correspondants de ces quatre points est souche d'un arbre, de chacun desquels ces quatre points sont des couples de nœuds ; lesquelles deux semblables souches comme  $O'$  et  $O$  d'une semblable involution de quatre points, sont ici nommées *souches réciproques* entre elles. 9

## 4.8 Pour-souche

4.8.1 Et laissant désormais une des cotes à nommer quand il y en a deux pour un même de ces quatre points.

4.8.2 De ce qui est dit suit davantage, que  $AC$  est à  $AO$ , comme  $AA'$ , à  $AB$  <sup>\*39</sup> ; et à l'envers, alternativement, changeant, divisant, composant, et le reste.

4.8.3 Ainsi les rectangles sont égaux entre eux des deux extrêmes  $\{AB, AC\} \leftarrow \langle \{AC, AB\} \rangle$  et des deux moyennes  $\leftarrow \langle \text{mitoyennes} \rangle \{AO, AA'\}$ , et le nœud  $A$  est *pour-souche* aux deux couples de nœuds  $\{B, C\} \leftarrow \langle \{C, B\} \rangle$  et  $\{O, A'\}$ , ou de branches  $\{AB,$

<sup>\*38</sup> Démonstration de la PROPOSITION 4.7.1. Par le THÉORÈME I,

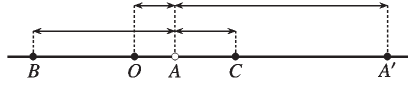
$$\begin{aligned} \overline{OA} \times \overline{OA'} &= |OB|^2 = |OC|^2 \Leftrightarrow \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B} \times \overline{A'B}}{\overline{AB} \times \overline{AB}} = \frac{\overline{A'C} \times \overline{A'C}}{\overline{AC} \times \overline{AC}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{CA} \times \overline{CA}}{\overline{BA} \times \overline{BA}} = \frac{\overline{CA'} \times \overline{CA'}}{\overline{BA'} \times \overline{BA'}} = \frac{\overline{O'C}}{\overline{O'B}} \\ &\Leftrightarrow |O'A|^2 = |O'A'|^2 = \overline{O'B} \times \overline{O'C}. \end{aligned}$$

<sup>\*39</sup> PROPOSITION 4.8.1 Soient  $O, A, A', B$  et  $C$  cinq points sur une droite tels que  $\overline{OA} \times \overline{OA'} = |OB|^2 = |OC|^2$  et  $\overline{OB} = -\overline{OC}$  ; alors

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AO} \times \overline{AA'}, \quad (4.8.1)$$

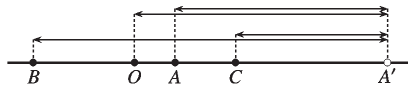
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CO} \times \overline{CA'}}{\overline{BO} \times \overline{BA'}} = -\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AA'}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{A'B} \times \overline{A'C}}{\overline{OB} \times \overline{OC}}. \quad (4.8.2)$$

$AC\} \leftarrow \langle \{AC, AB\} \rangle$  et  $\{AO, AA'\}$ .



4.8.4 Partant  $AC$  est à  $AB$ , comme le rectangle  $\{CO, CA'\}$  est au rectangle  $\{BO, BA'\}$ , à savoir, en la raison même que la composée des raisons de  $OC$  à  $OB$ , et de  $A'C$  à  $A'B$ , c'est-à-dire, à cause d'égalité d'entre les brins  $\{CO, BO\}$ , en raison de  $A'C$  à  $A'B$ , c'est-à-dire, en raison moitié de la raison du rectangle  $\{A'C, A'C\}$  au rectangle  $\{A'B, A'B\}$  <sup>\*40</sup>; et à l'envers, alternement, changeant, divisant, composant, et le reste.

4.8.5 D'où suit davantage que  $A'B$  est à  $A'A$ , comme  $A'O$ , à  $A'C$ , ainsi les rectangles sont égaux entre eux des deux extrêmes  $\{A'B, A'C\}$  et des deux moyennes  $\leftarrow \langle \text{mitoyennes} \rangle \{A'O, A'A\}$ , et le nœud simple extrême  $A'$  est ***pour-souche*** aux deux couples de nœuds  $\{B, C\}$  et  $\{O, A\}$ ,  $\leftarrow \langle \{A, O\}, \rangle$  ou aux deux couples de branches  $\{A'B, A'C\}$  et  $\{A'O, A'A\}$ .  $\leftarrow \langle \{A'A, A'O\}, \rangle$



4.8.6 Partant  $A'C$  est à  $A'B$ , comme le rectangle  $\{CO, CA\}$  est au rectangle  $\{BO, BA\}$ , c'est-à-dire, en la raison même que la composée des raisons de  $CO$  à  $BO$ , et de  $CA$  à  $BA$ , c'est-à-dire, à cause d'égalité d'entre les brins  $\{OC, OB\}$ , en raison de  $AC$  à  $AB$ , savoir en raison moitié de la raison du rectangle  $\{AC, AC\}$  au rectangle  $\{AB, AB\}$  <sup>\*41</sup>; et à

<sup>\*40</sup> Démonstration de la PROPOSITION 4.8.1.

$$\begin{aligned} \overline{AB} \times \overline{AC} &= (\overline{OB} - \overline{OA}) \times (\overline{OC} - \overline{OA}) = \overline{OB} \times \overline{OC} - (\overline{OB} + \overline{OC}) \times \overline{OA} + |\overline{OA}|^2 \\ &= -|\overline{OB}|^2 + 0 \times \overline{OA} + |\overline{OA}|^2 \\ &= -\overline{OA} \times \overline{OA'} + |\overline{OA}|^2 \\ &= -\overline{OA} \times (\overline{OA'} - \overline{OA}) = \overline{AO} \times \overline{AA'}, \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $\{B, C\}$  et  $\{O, A'\}$  sont deux couples de *nœuds* d'un *arbre*, dont la *souche* est  $A$ . D'où suit par le THÉORÈME I l'équivalence de (4.8.1) et de (4.8.2).

<sup>\*41</sup> En échangeant les rôles de  $A$  et de  $A'$  dans (4.8.1) et (4.8.2), on a aussi

l'envers, alternativement, changeant, divisant, composant, et le reste.

4.8.7 D'où suit qu'aussi  $AC$  est à  $AB$ , comme le rectangle  $\{CO, CA\}$  est au rectangle  $\{BO, BA\}$ , et que  $A'C$  est à  $A'B$ , comme le rectangle  $\{CO, CA'\}$  est au rectangle  $\{BO, BA'\}$ ; avec ce qui s'en suit.

4.8.8 Et que le rectangle  $\{CO, CA'\}$  est au rectangle  $\{BO, BA'\}$ , comme le rectangle  $\{CO, CA\}$  est au rectangle  $\{BO, BA\}$ ; avec ce qui s'en suit.

4.8.9 Davantage  $AA'$  est à  $AO$ , comme le rectangle  $\{A'B, A'C\} \leftarrow \langle \{A'C, A'B\} \rangle$  est au rectangle des égales entre elles  $\{OB, OC\}$ ,  $\leftarrow \langle \{OC, OB\} \rangle$  ou son égal le rectangle  $\{OB, OB\}$ ; avec ce qui s'en suit.

4.8.10 Et  $A'O$  est à  $A'A$ , comme le rectangle des égales entre elles  $\{OB, OC\}$ ,  $\leftarrow \langle \{OC, OB\} \rangle$  ou son égal le rectangle  $\{OB, OB\}$ , est au rectangle  $\{AB, AC\}$ .  $\leftarrow \langle \{AC, AB\} \rangle$

#### 4.9 D'autres propriétés proportionnelles

4.9.1 D'où suit d'abondant que  $CA'$  est à  $CO$ , ou à son égal  $OB$ , comme  $AC$  est à  $AO$ , et conséquemment comme  $AA'$  est à  $AB$  \*42.

4.9.2 Et alternativement  $CA'$  est à  $CA$ , comme  $OC$ , ou son égal  $OB$ , est à  $OA$ ; et ce qui s'ensuit. Ainsi  $\leftarrow \langle$  comme  $AA'$  est à  $AB$ . // Ainsi  $\rangle$  les rectangles sont égaux entre eux des deux extrêmes  $\{CA', OA\} \leftarrow \langle \{CA', AO\} \rangle$  et des deux moyennes  $\{CA, OC\}$ ,  $\leftarrow \langle$  moyennes  $\{CO, CA\} \rangle$ , et des extrêmes  $\{A'C, AB\}$  et des moyennes  $\{CO, AA'\}$  \*43.  $\leftarrow \langle$  moyennes  $\{CO, CA'\} \rangle$

$$\overline{A'B} \times \overline{A'C} = \overline{AO} \times \overline{A'A}, \quad (4.8.3)$$

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{CO} \times \overline{CA}}{\overline{BO} \times \overline{BA}} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{OB} \times \overline{OC}}. \quad (4.8.4)$$

\*42

donc, avec (4.8.1), on a

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CA'}}{\overline{CO}} \times \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} &= \frac{(\overline{OA'} - \overline{OC}) \times (-\overline{OA})}{(-\overline{OC}) \times (\overline{OC} - \overline{OA})} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OC} - \overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} \times \overline{OC} - |\overline{OC}|^2} = 1, \\ \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} &= \frac{(\overline{OA'} - \overline{OC}) \times \overline{OA}}{(\overline{OA} - \overline{OC}) \times \overline{OC}} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OA'} - \overline{OA} \times \overline{OC}}{\overline{OA} \times \overline{OC} - |\overline{OC}|^2} = -1, \end{aligned} \quad (4.9.1)$$

\*43

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{CO}} \times \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{CO}} \times \frac{\overline{AB}}{\overline{AA'}},$$

4.9.3 De plus  $BO$  est à  $AC$ , comme  $A'O$  est à  $A'C$ , et partant comme  $A'B$  est à  $A'A$ , ainsi les rectangles sont égaux entre eux des extrêmes  $\{BO, A'C\}$  et des moyennes  $\leftarrow$  (mitoyennes)  $\{AC, A'O\}$ , et des extrêmes  $\{BO, A'A\}$  et des moyennes  $\{AC, A'B\}$  <sup>\*44</sup>.

4.9.4 Davantage  $AC$  est à  $AA'$ , comme deux fois  $CO$ , qui est  $CB$ , est à deux fois  $BA'$ ; et alternativement à l'envers, changeant, divisant, composant, et le reste.

4.9.5 Davantage  $CA$  est à la moitié de  $CB$ , qui est  $CO$ ,  $\leftarrow$  (Davantage  $CA$  est à  $CO$ ,) comme  $A'A$  est à  $A'B$ . Et partant encore comme  $A'C$  est à  $A'O$ .

4.9.6 Ainsi les rectangles sont égaux entre eux des extrêmes  $\{CA, A'B\}$  et des moyennes  $\leftarrow$  (mitoyennes)  $\{CO, A'A\}$ , et des extrêmes  $\{CA, A'O\}$  et des moyennes  $\leftarrow$  (mitoyennes)  $\{CO, A'C\}$  <sup>\*45</sup>; et  $\leftarrow$   $\{CO, A'C\}$ , et  $A'A$  est à  $A'B$ , comme  $CA$  est à  $CO$ , moitié de  $CB$ ; et à l'envers, alternativement, changeant, divisant, composant, et le reste.

4.9.7 Davantage le rectangle  $\{A'A, A'A\}$  est au rectangle  $\{A'A, A'O\}$ , comme le rectangle  $\{AO, AA'\}$ , ou son égal le rectangle  $\{AB, AC\}$ , est au rectangle  $\{OA, OA'\}$ , ou à son égal le rectangle  $\{OB, OB\}$ , ou  $\{OC, OC\}$ , c'est-à-dire, comme  $A'A$  est à  $A'O$ ; et ce qui s'en déduit.

4.9.8 D'où suit  $\leftarrow$  (et ce qui s'en déduit. // C'est-à-dire, que le rectangle  $\{AA', AO\}$ , ou son égal le

---

d'autre part, par (4.8.1)

donc

$$\overline{CA'} \times \overline{OA} = -(\overline{CA} \times \overline{OC}) \quad \text{et} \quad \overline{A'C} \times \overline{AB} = -(\overline{CO} \times \overline{AA'}). \quad (4.9.2)$$

<sup>\*44</sup>

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{OC} \times (\overline{OC} - \overline{OA'})}{(\overline{OA} - \overline{OC}) \times (-\overline{OA'})} = \frac{|\overline{OC}|^2 - \overline{OA'} \times \overline{OC}}{\overline{OA} \times \overline{OA'} - \overline{OA'} \times \overline{OC}} = 1,$$

d'autre part, par (4.8.3)

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}},$$

donc

$$\overline{BO} \times \overline{A'C} = \overline{AC} \times \overline{A'O} \quad \text{et} \quad \overline{BO} \times \overline{A'A} = \overline{AC} \times \overline{A'B}. \quad (4.9.3)$$

<sup>\*45</sup>  $\overline{AC} \times \overline{BA'} = (\overline{OC} - \overline{OA}) \times (\overline{OA'} + \overline{OC}) = |\overline{OC}|^2 - \overline{OA} \times \overline{OA} + (\overline{OA'} - \overline{OA}) \times \overline{OC} = \overline{AA'} \times \overline{OC}$ , d'où, par (4.8.3)

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AA'}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{CO}} = -\left(\frac{\overline{CA}}{\overline{CO}} \times \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'A}}\right) = -\left(\frac{\overline{CA}}{\overline{CO}} \times \frac{\overline{A'O}}{\overline{A'C}}\right) = -1,$$

donc

$$\overline{CA} \times \overline{A'B} = \overline{CO} \times \overline{A'A} \quad \text{et} \quad \overline{CA} \times \overline{A'O} = \overline{CO} \times \overline{A'C}. \quad (4.9.4)$$

rectangle  $\{AB, AC\}$ , est au rectangle  $\{OA', OA\}$ , ou à son égal le rectangle  $\{OB, OB\}$ , ou  $\{OC, OC\}$ , comme  $A'A$  est à  $A'O$ . // D'où suit) que la raison composée des raisons de  $AB$  est à  $AO$  et de  $AC$  est à  $OA'$ , qui est la raison du rectangle  $\{AB, AC\}$ , ou son égal  $\{AA', AO\}$ , au rectangle  $\{OA', OA\}$ , ou son égal  $\{OB, OB\}$  ou  $\{OC, OC\}$ , est la même raison que de  $A'A$  est à  $A'O$ .

4.9.9 Mais la raison de  $A'A$  est à  $A'O$  est aussi la même que du rectangle  $\{AB, AC\}$  au rectangle  $\{OB, OC\}$ , à savoir la raison composée des raisons de  $BA$  à  $BO$  et de  $CA$  à  $CO$ .

4.9.10 Donc la raison composée des raisons de  $AB$  à  $OA \leftarrow \langle AO \rangle$  et de  $AC$  à  $OA'$  est la même que la composée des raisons de  $BA$  à  $BO$  et de  $CA$  à  $CO$ , à savoir la même que de  $A'A$  à  $A'O$  \*46.

4.9.11 Qui voudra poursuivre plus avant cette discussion, y trouvera bien encore du divertissement.

4.9.12 || Davantage, puisque  $A'A$  est à  $A'B$ , comme  $CA$  est à  $CO$ , et que la raison est 10 double qui est composée des raisons de  $CB$  à  $CA$  et de  $CA$  à  $CO$ , c'est-à-dire la raison de  $CB$  à  $CO$ .

4.9.13 La raison est aussi double qui est composée des raisons de  $CB$  à  $CA$ , et de  $A'A$  à  $A'B$ , même que de  $CA$  à  $CO$ , ou qui est même chose, la raison est double qui est composée des raisons de  $CB$  à  $A'B$ , et de  $A'A$  à  $CA$ .

4.9.14 Semblablement, puisque  $AA'$  est à  $AB$ , comme  $CA'$  est à  $CO$ , et que la raison est double qui est composée des raisons de  $CB$  à  $CA'$  et de  $CA'$  à  $CO$ , c'est-à-dire la

\*46 D'une part, par (4.8.1)

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'O}} &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} \times \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'O}} = -\frac{\overline{AO} \times \overline{AA'}}{\overline{OA} \times \overline{OA'}} = -\frac{\overline{AO} \times \overline{AA'}}{|OB|^2} = -\frac{\overline{AO} \times \overline{AA'}}{|OC|^2} \\ &= -\frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{OA} \times \overline{OA'}} = -\frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{|OB|^2} = -\frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{|OC|^2}, \end{aligned}$$

d'autre part, par (4.8.4)

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{OB} \times \overline{OC}},$$

donc

$$-\frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{OA} \times \overline{OA'}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{OB} \times \overline{OC}}, \quad \text{autrement dit,} \quad \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'O}} = -\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{OA'}}\right) = \frac{\overline{BA}}{\overline{BO}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CO}}. \quad (4.9.5)$$

raison de de  $CA'$  à  $CO$ .

4.9.15 La raison est aussi double qui est composée des raisons de  $CB$  à  $CA'$  et de  $AA'$  à  $AB$ , même que de  $CA'$  à  $CO$ , ou qui est même chose, la raison est double qui est composée des raisons de  $CB$  à  $AB$ , et de  $AA'$  à  $CA'$ . Donc aussi la raison est double qui est composée des raisons de  $A'A$  à  $A'C$ , et de  $BC$  à  $BA$  <sup>\*47</sup>.

#### 4.10 Construction du quatrième point

4.10.1 Et en convertissant la plus grande partie de ces propriétés ici déclarées, on en conclut que quatre points sont en involution.

4.10.2 Par exemple, quand en une droite  $CA'$ , trois pièces comme  $OA$ ,  $OB$ ,  $OA'$  sont entre elles continuellement proportionnelles, et qu'une quatrième pièce comme  $OC$  est égale à la moyenne  $\leftarrow$  (moyen)  $OB$ , les quatre points  $A'$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $C$  sont évidemment en involution <sup>\*48</sup>.

4.10.3 Quand en une droite  $CA'$ , quatre pièces comme  $AA'$ ,  $AB$ ,  $AC$ ,  $AO$  sont deux à deux proportionnelles, et que la pièce comme  $OC$  est égale à la pièce comme  $OB$ , c'est-à-dire que le point comme  $O$  mipartit la pièce comme  $BC$ ,  $\leftarrow$  ( $CB$ ), les quatre point  $A'$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $C$  sont évidemment en involution <sup>\*49</sup>.

4.10.4 Quand en une droite  $CA'$ , quatre pièces comme  $A'B$ ,  $A'A$ ,  $A'O$ ,  $A'C$  sont deux

---

<sup>\*47</sup> Par (4.9.4)

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}},$$

donc

$$2 = \frac{\overline{CB}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} \times \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{A'B}} \times \frac{\overline{A'A}}{\overline{CA}}. \quad (4.9.6)$$

De même, par (4.9.2)

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}},$$

donc

$$2 = \frac{\overline{CB}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{CA'}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{AA'}}{\overline{CA'}}. \quad (4.9.7)$$

<sup>\*48</sup> Voir les figures de la section 4.1.

<sup>\*49</sup> Voir la figure du paragraphe 4.8.3.

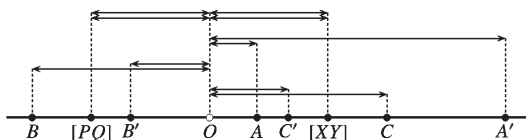
à deux proportionnelles, et que le point comme  $O$  mipartit la pièce comme  $BC$ ,  $\leftarrow \langle C B, \rangle$  les quatre point  $A', B, A, C$  sont évidemment en involution <sup>\*50</sup>.

4.10.5 Et semblables converses du reste qui sont évidentes, et qui pourraient au besoin être déduites au long.

4.10.6 Il est semblablement évident de plusieurs endroits ci-devant qu'étant donnés de position trois quelconques de quatre points d'une quelconque involution, le quatrième point de la même involution, correspondant au quelconque de ces trois, est aussi donné de position.

## 4.11 Involution de quatre points et celle de six points

4.11.1 Quand en un tronc droit, trois couples de nœuds  $\{A, A'\}$ ,  $\{B, B'\}$ ,  $\{C, C'\}$ , sont en involution entre eux <sup>\*51</sup>, que deux autres couples de nœuds, moyens, unis, doubles ou simples,  $\{P, Q\}$ ,  $\{X, Y\}$ , font comme une involution  $\leftarrow \langle \text{font une involution} \rangle$  de quatre points avec chacune des deux quelconques couples  $\{B, B'\}$ ,  $\{A, A'\}$ , de ces trois couples de nœuds extrêmes. Ces deux mêmes nœuds moyens  $\{P, Q\}$ ,  $\{X, Y\}$ , font encore comme une involution  $\leftarrow \langle \text{font une involution} \rangle$  [En cette seule occasion sans le tirer à conséquence, deux couples de nœuds moyens simples sont comprises en ce mot involution.] aussi de quatre points avec la troisième couple de nœuds extrêmes  $\{C, C'\}$ .



4.11.2 Car puisque les deux nœuds moyens  $\{P, Q\}$ ,  $\{X, Y\}$ , font comme une involution  $\leftarrow \langle \text{font une involution} \rangle$  de quatre points avec chacune des couples de nœuds extrêmes

<sup>\*50</sup> Voir la figure du paragraphe 4.8.5.

<sup>\*51</sup> Nous revenons ici aux cotes des points signalées dans la note du paragraphe 2.2.1.

$\{B, B'\}$ ,  $\{A, A'\}$ , ayant miparti en  $O$  le brin  $PX$ , ce point  $O$  est la souche aux couples de nœuds moyens  $\leftarrow$  (aux quatre nœuds moyens)  $\{P, Q\}$ ,  $\{X, Y\}$ , et extrêmes  $\{B, B'\}$ ,  $\{A, A'\}$  ; partant la branche  $OB'$  est à la branche  $OB$ , comme le rectangle  $\{B' A, B' A'\}$  est au rectangle  $\{BA, BA'\}$ , et par l'hypothèse le rectangle  $\{B'C, B'C'\}$  est au rectangle  $\{BC, BC'\}$ , comme le rectangle  $\{B' A, B' A'\}$  est au rectangle  $\{BA, BA'\}$ , conséquemment la branche  $OB'$  est à la branche  $OB$ , comme le rectangle  $\{B'C, B'C'\}$  est au rectangle  $\{BC, BC'\}$ , et  $O$  est souche à chacune des couples de nœuds moyens  $\{P, Q\}$ ,  $\{X, Y\}$ , et extrêmes  $\{A, A'\}$ ,  $\{B, B'\}$ ,  $\{C, C'\}$ , qui partant sont tous en involution entre eux, aussi les deux couples de nœuds moyens  $\{P, Q\}$ ,  $\{X, Y\}$ , sont en involution avec la troisième couple de nœuds extrêmes  $\{C, C'\}$ .

4.11.3 Mais pour ce *Brouillon*, c'est assez remarquer des propriétés particulières de ce cas qui en fourmille, et si cette façon de procéder en géométrie ne satisfait, il est plus aisé de le supprimer que de le parachever au net et lui donner sa forme complète.



---

**論文要旨**

---

## デザルグ『計画草稿』本文解析の試み —第一部—

久木田 英史

鍵語：数学史・射影幾何学・フランス・17世紀・デザルグ

射影幾何学の起源とされるべきジラール・デザルグ『円錐と平面との交わり  
の事象生起達成計画草稿』（1639）について、出版当時の原典に基づいて本文  
校訂を試みた。その際、特に章立ての無い原典では見通し難い論理構成を、段  
落の分節化により明示し、また、注解・図解を豊富に加えることで、代数学語  
に拠らない難解な本文の趣旨が、ユークリッド幾何学の基礎的な知識を有する  
現代フランス語の読者に、明確に了解可能となることを目標とした。今回提示  
されるのは、計量幾何学の範囲内にあって、図形の射影的性質を展開するため  
の補助命題となる、『計画草稿』全 30 ページのうち冒頭約 10 ページ、前半の  
予備考察的な部分である。