等差素数列について

洞田勝博，篠原雅史，酒井幸吉

はじめに

最近,「連続する3つの奇数がすべて素数になるのは，3, 5, 7だけであることを証明せよ」という問題 ([1] の問題 17) に出会った．これは"三つ子素数"は 3, 5, 7 だけであるという命題であり，3 つの素数が**公差 2 の等差数列**になるのは 3, 5, 7 に限るという命題でもある．後者の立場で公差 4, 8 の素数だけから成る等差数列を考えると，それぞれ (3, 7, 11), (3, 11, 19) に限ることもわかる.

これらの命題に啓発され，本論では素数のみから成る等差数列を考える．このような数列を探す計算実験を行い，得られた諸データを報告する．等差素数列に関する 2 つの予想も提示する.

なお，本論で「数」はいつも自然数の意味とする.

参考文献

[1] 水上　勉：整数の問題，日本評論社 (2005)

[2] P.Ribenboim(吾郷訳編): 素数の世界，共立出版 (2001)

§1　等差素数列

増加的なの等差数列が，ある数 $t \geq 3$ に対して次の性質 $(*)$ を満たすとき，初項から第 t までの有限数列を**長さ** t の**等差素数列**という.

$(*)$　初項から第 t 項項までは素数が並び，第 $(t+1)$ 項が合成数である.

上で $t \geq 3$ なる要請は自明な等差数列を除くためである．従って素数 2 を初項とする等差素数列ない．以後，**奇素数のみを対象**とし，これを単に素数とう．文字 p はこのような素数を表すものとする.

一般に初項 a，公差 d の等差数列の第 $(a+1)$ 項は a の倍数になることより次か成立する.

命題 1　初項 p の等差素数列の長さは p 以下である.　▲

命題「任意の p に対して，初項 p の等差素数列が**存在する**」が真かどうか，筆者達は知らない．しかし，10^7 以下の任意の素数 p に対して，初項 p の等差素数列が非常に多数存在することを計算実験により確認しており，この命題は正しいことを確信している．

以下，次の略記法・記号を用いる．

$\mathrm{Ap}(p)=$ 初項 p の等差素数列,

$\mathrm{Ap}(p,\, d)=$ 公差 d の $\mathrm{Ap}(p)$,

$\mathcal{D}(p)=\mathrm{Ap}(p)$ 達の公差の集合,

$N[a,\, \hat{c}]=a$ の倍数のうち c で整除されない数の集合.

次は自明であるが重要である．

命題 2　$d \in \mathcal{D}(p)$ は p で整除されない偶数，*i.e.* $\mathcal{D}(p) \subset N[2,\, \hat{p}]$.　▲

次の命題は素数 3 の特殊性を示す．

命題 3　p に関する次の 3 条件は互いに同値である．

1)　$p=3$,

2)　$\mathcal{D}(p) \subset \cap N[2,\, \hat{3}]$,

3)　$\mathcal{D}(p) \cap N[2,\, \hat{3}] \neq \emptyset$.

証明　1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) は命題 2 より明らか．$d \in \mathcal{D}(p) \cap N[2,\, \hat{3}]$ とする．このとき 3 数 $p,\, p+d,\, p+2d$ は $\mod 3$ の世界で眺めても互いに異なる．従ってこの 3 数に必ず 3 がある．故に $p=3$.　▲

上の命題より直ちに次が従う．

命題 4　$p>3$ ならば $\mathcal{D}(p) \subset N[6,\, \hat{p}]$.　▲

命題 5　$\mathrm{Ap}(p,\, d)$ の長さを t とすると，$q \leq t,\, q \neq p$ を満たす素数 q は d の約数である．

証明　$t \leq p,\, q \neq p$ だから $q<p$ に注意する．d は q で整除されないと仮定する．$\mathrm{Ap}(p,\, d)$ の初項から第 q 項までの q 個の素数達を $\mod q$ の意味で考えても互いに異なる．従ってこれらの中に q 自身が現れる．これは $q<p$ に反する．　▲

上の命題より直ちに次が従う．

命題 6　$\mathrm{Ap}(p,\, d)$ の長さを t とすると，d は数 Q の倍数である．ただし Q は $q \le t, q \ne p$ を満たす素数 q 達 (2 を含む) の積である．
特に，$t = p$ の場合，d は p より小さいすべての素数 (2 を含む) の積の倍数である．▲

注意　命題 6 は，$d \in \mathcal{D}(p)$ が Q の倍数の場合，$\mathrm{Ap}(p,\, d)$ の長さが t 以上になることを主張しているのではない．▲

上に述べた諸命題を拠りどころに，等差素数列を探す計算実験を行った．そのあらましと結果を示す．なお，紙幅の制限などより多くのデータを割愛せざるを得なかった．

§ 2　$\mathcal{D}(p)$ は無限集合か—予想 1

記述を簡潔にするため次の集合を準備する．$m,\, z,\, a,\, b$ は定数とする．

$\mathcal{D}(p,\, m) = \{d \in \mathcal{D}(p) \,|\, d$ は m の倍数 $\}$

$\mathcal{D}(p\,;\, z) = \{d \in \mathcal{D}(p) \,|\, d \le z\}$

$\mathcal{D}(p,\, m\,;\, z) = \mathcal{D}(p,\, m) \cap \mathcal{D}(p\,;\, z)$

$N[a,\, \hat{b};\, z] = \{x \in N[a,\, \hat{b}] \,|\, x \le z\}$

実験 1　$\mathrm{Ap}(3)$ を調べる実験．

$\mathrm{Ap}(3)$ の長さはいずれも 3 であるから，公差の集合 $\mathcal{D}(3) = \mathcal{D}(3,\, 2)$ だけが問題である．公差の上限 10^8 を設定し，$D_3 := \mathcal{D}(3\,;\, 10^8)$ を調べる．命題 2 より，$d \in N[2,\, \hat{3}\,;\, 10^8]$ に対して，2 数 $3 + d,\, 3 + 2d$ がいずれも素数になる d を調べる．素数判定は次の原理に拠る．

数 a が素数 $\Leftrightarrow$ a は $p \le \sqrt{a}$ なるすべての素数 p で整除されない．

この判定に用いる素数列は「エラトステネスの篩」により事前に生成しておく．

結果は，$D_3 = \{2,\, 4,\, 8,\, \cdots,\, 99999844\}$ で D_3 の要素の個数 $|D_3| =$

表 1: Ap(3) の公差の例示 (D_3 の要素の昇順に 100 個)

2	4	8	10	14	20	28	34	38	40
50	64	68	80	94	98	104	110	124	134
154	164	178	188	190	208	220	230	238	248
260	280	308	314	328	344	370	418	428	430
440	454	458	484	518	544	560	574	584	610
614	628	638	640	644	650	658	698	724	740
748	754	770	784	808	860	878	904	934	938
964	974	988	1018	1030	1048	1088	1100	1120	1168
1184	1190	1198	1210	1228	1274	1288	1294	1358	1364
1420	1424	1450	1468	1480	1484	1508	1540	1580	1594

$846,547$ が得られた．表 1 に D_3 の要素のうち小さいものから順に 100 個だけ示した．なお，$N[2,\,\hat{3}\,;\,10^8]$ の中で D_3 の占める割合は約 3.3% である．なお，$|N[2,\,\hat{3}\,;\,10^8]| = 33,333,334$ である． ▲

実験 2 $p > 3$ に対する Ap(p) を調べる実験.
公差の上限 10^8 を設定して $D_p := \mathcal{D}(p\,;\,10^8)$ を調べることにする．命題 4 より，$N[6,\,\hat{p}\,;\,10^8]$ に属する各数 d に対して，d が Ap(p) の公差になり得るかどうかを調べる．すなわち，数列 $p_k := p + kd$ において，少なくとも $p_1,\,p_2$ は素数になり，引き続きどこまで連続して素数が並ぶかを調べる．実験結果は，$5 \le p \le 113$ なる p に対して表 2〜表 4 に示した．

表 2 Ap(p) の一部をその (公差, 長さ) の組で示してある．"最小"欄は $\mathcal{D}(p)$ の最小値に対する等差素数列，"最長"欄は Ap(p, d), ($d \in D_p$) 達のうち長さが最大のものである．ただし，このような Ap(p) が複数個ある場合，そのうち公差が最小のものを示てある．"最大"欄は，D_p に属する最大数に対応する Ap(p) である．

表 3 $|D_p|$ およびその内訳 $j_k = |D_p \cap I_k|$, ($k = 1,\,2,\,3,\,4,\,5$) を示した．

ここで j_k は幅 2×10^7 の整数区間 $I_k=[2(k-1)\times10^7,\ 2k\times10^7]$ に属する D_p の要素の個数である．また，$r(p)$ 欄は $N[6,\ \hat{p};\ 10^8]$ の中で $\mathcal{D}(p;\ 10^8)$ の占める割合 (%単位) である．なお，$|N[6,\ \hat{p};10^8]|$ は p に依存する (p とともに増える) が，$p=5$ および $p=113$ の場合それぞれ $13,333,333$ および $16,519,174$ である．

表 4　$\mathrm{Ap}(p,\ d)$, ($d\in D_p$) の長さは頻度分布である．いずれの長さも 3〜10 の範囲にある．$p=5,\ 7$ に対しては，$\mathrm{Ap}(p)$ の最大長は p であり限度いっぱいである (命題 1)．$p>7$ に対しては $3\le t\le 8$ なる各 t に対して長さ t の $\mathrm{Ap}(p)$ が存在する．どの p に対しても長さ 3 の $\mathrm{Ap}(p)$ が圧倒的多数であり，長さ 10 の等差素数列も稀に現れる．なお，表中に長さ t に対する頻度が 0 とあるのは，$d<10^8$ の範囲に長さ t の $\mathrm{Ap}(p,\ d)$ が存在しないことを意味するが，公差の範囲を広げると長さ t の $\mathrm{Ap}(p)$ が現れる可能性はある．▲

実験 3　定数 $m:=2\times3\times5\times7\times11\times13=30030$ および公差 d の上限 $z:=5\times10^9$ を設定して，$\mathrm{Ap}(p,\ d)$, $d\in\mathcal{D}(p,\ m;\ z)$ を調べる実験．
$p\ge17$ に対，$D_{p,m}:=\mathcal{D}(p,\ m;\ z)$ を調べる．$D_{p,m}$ の要素は $N[m,\hat{p};\ z)$ の中で探す．$17\le p\le149$ に対する結果を表 5〜表 7 にまとめた．
表 5〜7 の見方は，実験 2 のそれぞれ表 2〜4 に順ずる．表 6 の $r(p)$ 欄は $N[m,\hat{p};\ z)$ のなかで $D_{p,m}$ の占める割合である．なお，$|N[m,\hat{p};\ z)|$ は p に依存する (p とともに増える) が，$p=17$ および $p=149$ の場合それぞれ $156,706$ および $165,383$ である．また，表 7 の内訳 j_k ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$) 欄は幅 10^9 の整数区間 $[(k-1)\times10^9,\ k\times10^9]$ に属する $D_{p,m}$ の要素の個数である．▲

注意　上の実験は $\mathcal{D}(p\,;10^8)$ を $\mathcal{D}(p\,;z)$ に広げて行いたかったが，計算時間が非常に長くなるので，$\mathcal{D}(p,\ m;\ z)$ に制限して調べた．この制限にも拘わらず $\mathcal{D}(p,\ m;\ z)$ も多くの要素を含むことがわかった．

予想 1　任意の p に対して，$\mathrm{Ap}(p)$ は**無限個**ある．▲

表 2: Ap(p) の例示 ($5 \leq p \leq 113$)

p	最小	最長	最大
5	(6 , 5)	(12 , 5)	(99999834 , 4)
7	(6 , 3)	(150 , 7)	(99999636 , 3)
11	(6 , 4)	(32671170 , 9)	(99999960 , 3)
13	(24 , 3)	(2190090 , 8)	(99999534 , 3)
17	(6 , 3)	(6930 , 9)	(99999942 , 3)
19	(12 , 3)	(35707350 , 10)	(99999084 , 3)
23	(18 , 3)	(100590 , 9)	(99999984 , 3)
29	(12 , 3)	(8456490 , 9)	(99999960 , 3)
31	(6 , 3)	(64760640 , 9)	(99999900 , 3)
37	(30 , 5)	(2040570 , 10)	(99999510 , 3)
41	(6 , 4)	(19489470 , 9)	(99999996 , 3)
43	(18 , 4)	(52920 , 9)	(99999888 , 3)
47	(6 , 3)	(3025260 , 9)	(99999942 , 3)
53	(18 , 4)	(15441930 , 9)	(99999918 , 4)
59	(12 , 3)	(49267680 , 9)	(99999990 , 3)
61	(6 , 4)	(27388620 , 9)	(99999420 , 3)
67	(6 , 3)	(48175050 , 9)	(99999372 , 3)
71	(18 , 3)	(13959330 , 9)	(99999768 , 3)
73	(54 , 3)	(2896740 , 9)	(99999630 , 3)
79	(24 , 4)	(49448070 , 9)	(99999264 , 4)
83	(24 , 3)	(3803520 , 10)	(99999954 , 3)
89	(12 , 3)	(11321310 , 9)	(99999900 , 3)
97	(6 , 3)	(31981950 , 9)	(99999606 , 3)
101	(6 , 3)	(9649080 , 9)	(99999870 , 3)
103	(24 , 3)	(20656860 , 9)	(99999828 , 3)
107	(30 , 6)	(10307220 , 8)	(99999966 , 3)
109	(42 , 3)	(1346520 , 9)	(99999612 , 3)
113	(18 , 4)	(1012410 , 10)	(99999960 , 3)

表 3: $|D_p|$ とその内訳 $(5 \leq p \leq 113)$

p	$\lvert D_p \rvert$	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	$r(p)$
5	564469	137017	114750	107827	103851	101024	4.2
7	507677	123009	102615	97378	93581	91094	3.6
11	470080	113924	95601	89503	86895	84157	3.1
13	462298	111874	93761	88589	85091	82983	3
17	451048	109477	91536	86056	83225	80754	2.9
19	448563	108732	91136	85701	82670	80324	2.8
23	443290	107834	89763	84756	81704	79233	2.8
29	438765	106345	88986	84107	80830	78497	2.7
31	437841	105981	89143	83689	80248	78780	2.7
37	434720	105147	88180	83407	79941	78045	2.7
41	433809	105459	87920	82965	79869	77596	2.7
43	433993	105239	87959	82933	79985	77877	2.7
47	433082	105117	87824	82742	79790	77609	2.7
53	432180	104934	87505	82721	79579	77441	2.6
59	430497	104535	87195	82439	79402	76926	2.6
61	429848	104172	86918	82527	79206	77025	2.6
67	429202	104400	87139	81891	78903	76869	2.6
71	429548	104420	87231	81776	79117	77004	2.6
73	428756	103622	87335	81801	79291	76707	2.6
79	428317	104040	86755	81955	78976	76591	2.6
83	428541	103705	86920	82015	78912	76989	2.6
89	427776	103752	87065	81579	78841	76539	2.6
97	427612	103525	86835	81796	79051	76405	2.6
101	427242	103367	87008	81727	78555	76585	2.6
103	427132	103455	86536	81892	78735	76514	2.6
107	427303	103838	86638	81807	78356	76664	2.6
109	427181	103731	86475	81972	78401	76602	2.6
113	426832	103596	86771	81473	78423	76569	2.6

表 4: $\mathrm{Ap}(p, d), (d \in D_p)$ の長さ頻度分布 $(5 \leq p < 113)$

p	3	4	5	6	7	8	9	10
5	464144	84473	15852					
7	432436	67314	6333	1304	290			
11	407588	56963	4677	759	71	19	3	0
13	402034	54982	4524	681	66	11	0	0
17	393685	52533	4158	593	62	13	4	0
19	391935	51933	4034	586	65	7	2	1
23	388178	50532	3943	574	57	5	1	0
29	384843	49529	3780	558	47	7	1	0
31	384507	49067	3701	507	52	6	1	0
37	381672	48750	3728	505	53	11	0	1
41	381373	48249	3630	514	36	6	1	0
43	381160	48579	3689	508	48	5	4	0
47	380339	48448	3690	531	60	12	2	0
53	380065	48063	3538	461	45	7	1	0
59	378664	47763	3506	497	50	15	2	0
61	377677	47973	3636	498	45	18	1	0
67	377280	47832	3567	479	39	4	1	0
71	377871	47359	3720	544	42	11	1	0
73	377231	47297	3669	505	47	6	1	0
79	376855	47283	3585	534	45	14	1	0
83	377154	47295	3552	503	33	3	0	1
89	376679	47058	3502	479	49	7	2	0
97	376415	47169	3513	470	35	8	2	0
101	376440	46797	3472	485	41	5	2	0
103	376200	46894	3482	506	46	3	1	0
107	376216	46990	3572	485	34	6	0	0
109	376302	46795	3513	519	40	10	2	0
113	375683	47136	3477	490	36	8	1	1

表 5: Ap(p) の例示 ($17 \leq p \leq 149$)

p	最小	最長	最大
17	(30030 , 4)	(2330027700 , 9)	(4999995000 , 3)
19	(150150 , 3)	(2691348660 , 8)	(4999784790 , 3)
23	(240240 , 5)	(353152800 , 8)	(4999484490 , 3)
29	(30030 , 3)	(2484562080 , 9)	(4999934940 , 3)
31	(90090 , 3)	(2418586170 , 9)	(4999784790 , 3)
37	(210210 , 3)	(25225200 , 8)	(4999904910 , 3)
41	(30030 , 3)	(19489470 , 9)	(4998703710 , 3)
43	(60060 , 3)	(33153120 , 9)	(4999904910 , 3)
47	(60060 , 3)	(559008450 , 8)	(4999094100 , 3)
53	(990990 , 5)	(1661980320 , 8)	(4997382390 , 3)
59	(90090 , 4)	(80180100 , 8)	(4999964970 , 3)
61	(180180 , 3)	(2598045450 , 8)	(4998463470 , 3)
67	(30030 , 3)	(453903450 , 9)	(4999694700 , 4)
71	(510510 , 3)	(1604983380 , 9)	(4999904910 , 4)
73	(30030 , 6)	(646816170 , 10)	(4999454460 , 4)
79	(30030 , 3)	(1786785000 , 8)	(4999934940 , 3)
83	(90090 , 3)	(1505043540 , 8)	(4999184190 , 4)
89	(30030 , 3)	(2467294830 , 10)	(4999844850 , 3)
97	(150150 , 3)	(31981950 , 9)	(4999995000 , 3)
101	(90090 , 5)	(546095550 , 8)	(4999214220 , 3)
103	(480480 , 4)	(4767232470 , 8)	(4999814820 , 4)
107	(30030 , 4)	(2442700260 , 8)	(4999995000 , 4)
109	(30030 , 4)	(1872640770 , 8)	(4999604610 , 3)
113	(120120 , 3)	(46126080 , 8)	(4999514520 , 3)
127	(90090 , 3)	(307927620 , 9)	(4999574580 , 3)
131	(660660 , 5)	(2546333790 , 8)	(4999814820 , 3)
137	(90090 , 7)	(200059860 , 8)	(4999604610 , 3)
139	(330330 , 5)	(99519420 , 8)	(4999574580 , 4)
149	(210210 , 3)	(194984790 , 8)	(4999874880 , 3)

表 6: $|\mathcal{D}| := |D_{p,m}|$ とその内訳 $(17 \leq p \leq 149)$

p	$\lvert\mathcal{D}\rvert$	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	$r(p)$
17	10071	2274	2076	1992	1906	1823	6.4
19	10207	2359	2056	2019	1900	1873	6.5
23	10024	2372	2020	1947	1819	1866	6.3
29	9872	2249	2023	1922	1823	1855	6.1
31	9822	2298	1947	1881	1866	1830	6.1
37	9934	2318	2016	1930	1852	1818	6.1
41	9830	2313	1931	1926	1846	1814	6.1
43	9787	2265	1983	1907	1796	1836	6
47	9658	2358	1913	1849	1748	1790	5.9
53	9735	2299	1927	1868	1852	1789	6
59	9667	2295	1934	1922	1776	1740	5.9
61	9696	2279	1948	1919	1795	1755	5.9
67	9753	2252	1938	1911	1814	1838	5.9
71	9744	2256	2009	1868	1871	1740	5.9
73	9670	2254	1939	1864	1884	1729	5.9
79	9655	2213	1915	1880	1854	1793	5.9
83	9629	2265	1998	1831	1756	1779	5.9
89	9773	2316	1937	1960	1802	1758	5.9
97	9603	2236	1981	1888	1798	1700	5.8
101	9590	2269	1898	1900	1757	1766	5.8
103	9670	2217	1938	1938	1801	1776	5.9
107	9567	2267	1980	1753	1842	1725	5.8
109	9584	2205	1991	1780	1796	1812	5.8
113	9703	2301	1879	1890	1837	1796	5.9
127	9688	2269	1972	1877	1791	1779	5.9
131	9570	2185	1986	1875	1762	1762	5.8
137	9502	2211	1911	1818	1831	1731	5.7
139	9510	2221	1902	1871	1770	1746	5.8
149	9590	2247	1975	1815	1802	1751	5.8

表 7: $\mathrm{Ap}(p,d)$, $d \in D_{p,m}$ の長さの頻度分布 ($17 \le p < 100$)

p	3	4	5	6	7	8	9	10
17	7683	1809	443	104	22	7	3	0
19	7695	1925	463	103	17	4	0	0
23	7716	1722	469	91	22	4	0	0
29	7528	1801	425	95	19	1	3	0
31	7495	1780	428	96	15	5	3	0
37	7629	1809	387	83	21	5	0	0
41	7605	1698	405	108	11	2	1	0
43	7497	1778	398	93	15	5	1	0
47	7424	1724	400	87	20	3	0	0
53	7521	1719	400	79	12	4	0	0
59	7385	1788	388	83	18	5	0	0
61	7460	1731	399	86	18	2	0	0
67	7486	1740	415	85	24	2	1	0
71	7532	1718	398	75	17	3	1	0
73	7469	1695	409	77	17	2	0	1
79	7433	1739	385	80	17	1	0	0
83	7443	1741	359	67	15	4	0	0
89	7530	1752	383	89	14	2	2	1
97	7402	1744	357	79	20	0	1	0
101	7356	1752	377	88	13	4	0	0
103	7465	1728	385	73	18	1	0	0
107	7403	1694	356	92	20	2	0	0
109	7363	1721	391	91	16	2	0	0
113	7555	1685	360	83	14	6	0	0
127	7497	1728	361	71	23	6	2	0
131	7383	1699	391	74	22	1	0	0
137	7397	1634	386	52	26	7	0	0
139	7306	1727	383	73	17	4	0	0
149	7337	1722	415	94	17	5	0	0

§3 長さ13以上の等差素数列の探索

実験2および実験3で得られた等差素数列達の長さは最大10である(表4, 表7参照). 公差の上限を10^9に拡大し, pを1000以下の素数達に大して調べても, $p = 157$に対してのみ長さ12の等差素数列が現れる(表10-2参照). そこで対象とする素数の範囲を拡大して次の実験を行った.

実験4 長さ13以上の等差素数列を探す実験.
実験2と同じく公差の上限を10^8に設定して, $17 \leq p < 10^7$なるすべての素数pに対して長さ13以上の等差素数列の有無を調べた. このような等差素数列の公差は命題6により, $N[m, \hat{p}; 10^8]$の中で探せばよい. ただし, $m = 30030$は実験3で用いたもの. 対象にした素数pの総数は$\pi(10^7) - 6 = 664,573$である. ここで, $\pi(x)$は数x以下の素数の総数を表す関数である.
結果は長さ14のものが7個(表8), 13のものが54個(表9)あることがわかった.

表8: 長さ$= 14$の$\mathrm{Ap}(p, d)$, ($p < 10^7$, $d < 10^8$)

p	d	p	d
146141	54444390	5102831	46276230
503213	4504500	8106601	24204180
1460993	15735720	9205069	30990960
4692089	84744660		

文献[2]によれば, 現在知られている等差素数列の最長記録は**22**であり, 次で与えられる(Pritchard, Moran, Thyssen等により1993年発見).

初項$= 11,410,337,850,553$.

公差$= 4,609,098,694,200$.

この記録をみるだけでも, より長い等差素数列を見つけるには強力な計算環境と十分な計算時間が必要であることが窺える. 今後, 実験4を公差の上限を10^{12}位に拡大して実施したいと考えている.

表 9: 長さ = 13 の Ap(p, d), $(p < 10^7, d < 10^8)$

p	d	p	d
4943	60060	4322713	19789770
57689	11771760	4692817	9669660
70589	8408400	4907417	36156120
96461	930930	4990393	25345320
163753	39129090	5007713	4504500
234803	34234200	5025049	5495490
391861	57867810	5041601	51561510
411833	10240230	5075309	40540500
504563	94144050	5230513	3513510
714971	28528500	5275451	120120
766439	510510	5534363	26606580
777619	67897830	5937493	26246220
1014697	37507470	6221203	83153070
1749457	19909890	6652307	86996910
1941389	18018000	6743437	2792790
1995977	27657630	6847783	22372350
2036623	1531530	6874207	9129120
2069687	25255230	7291619	80570490
2158501	21801780	7433957	46156110
2280917	870870	7454413	77147070
2382221	2912910	7538221	8168160
2430331	98708610	8310551	25014990
2713313	8168160	8713181	47207160
2768431	21561540	8722877	1021020
3405019	88588500	8988781	13333320
3641951	1831830	8999899	13843830
3974053	570570	9879577	26516490

§4 $d(p,t)$ の計算—予想 2

素数 p および t, $3 \leq t \leq p$ に対してに対して $d(p, t)$ を次で定義する.

$d(p, t) =$ 長さ t の $\mathrm{Ap}(p)$ 達の公差の最小値.

例えば $d(3, 3) = 2$, $d(5,3) = 24$, $d(5, 4) = 18$, $d(5, 5) = 6$ である. 長さ t の $\mathrm{Ap}(p)$ が存在しない場合は $d(p, t)$ は定義できない. そこで次の実験を行った.

実験 5 1000 以下の素数 $p(\pi(1000) - 1 = 167$ 個) に対して $d(p, t)$ を調べる実験. ただし公差の上限は 10^9 に設定.

$d(5,3) > d(5, 5)$ が示すように, 一般に p に対して $d(p, t)$ は t に関する増加関数ではない. 計算結果は表 10-1～表 10-5 に示した. 表 10 達の中で $d(p, t) = 0$ とあるのは, 調べた公差の範囲内に長さ t の $\mathrm{Ap}(p)$ が存在しなかったことを意味する. 対象とした p 達の大部分に対して $d(p, 10)$ 位までは確定でき, $d(p, 12)$ が求まったのは $p = 157$ のみである. ▲

注意 表 10 達の中で, $p = 11, 13$ に対しては d の上限を 10^{11} に設定して $d(p, t)$ を求めてある. $p \geq 17$ に対して $d(p, t)$ 欄の値が 10^9 を超えるものが混在する. これは $d < 10^9$ の範囲で $d(p, t)$ が確定できなかったが, $N[m, \hat{p}; 10^{11}]$, $m = 30030$ の中で (公差の上限拡大), 長さ t の $\mathrm{Ap}(p)$ が初めて現れる 公差の値であり, 正確な $d(p, t)$ より大きい場合もありうる.

いま, p に対して $\mathrm{Ap}(p)$ 達の長さの最大値を $L(p)$ と表す. 命題 1 で注意したように, $L(p) \leq p$ である. 表 10-1 が示すように, $p = 3, 5, 7, 11$ に対しては $L(p) = p$ が成立し, 任意の t, $3 \leq t \leq p$ に対して長さ t の $\mathrm{Ap}(p)$ が存在する. $p = 13$ に対しても同様の現象が起きることを確認するには, $N[m, \hat{1}3]$, $(m = 2 \times \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310)$ の中で $d(p, 12)$, $d(p, 13)$ を探すことである. 我々は次を予想する.

予想 2 任意の p に対して $L(p) = p$ であり, 任意の t, $3 \leq t \leq p$ に対して長さ t の $\mathrm{Ap}(p)$ が存在する. ▲

表10-1

p	t=3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	2								
5	24	18	6						
7	6	12	360	30	150				
11	18	6	30	60	123480	1210230	32671170	224494620	1536160080
13	24	30	150	90	244230	2190090	153204030	111739740	19458564510
17	6	12	150	22260	2940	86100	6930	17611483890	49209200040
19	12	54	420	1650	32760	1559040	546840	35707350	9836146320
23	18	30	210	240	79800	5593350	100590	40202602440	0
29	12	54	120	2100	15120	944370	8456490	477346800	0
31	6	36	570	1830	143850	369180	64760640	104816250	0
37	36	120	30	2310	16380	1685040	14753498760	2040570	0
41	48	6	1050	420	35070	6160560	19489470	70720439790	0
43	30	18	60	420	4620	719460	52920	27136789680	0
47	6	12	930	7140	210	644700	3025260	38284165920	0
53	30	18	7380	60	1050	1256640	15441930	783486900	0
59	12	24	390	5250	14910	1231650	49267680	0	0
61	18	6	90	3120	65310	9870	27388620	528398640	0
67	6	30	420	39540	19320	26670	48175050	0	0
71	18	96	60	19320	2310	503160	13959330	0	0
73	54	78	810	150	13020	5880	2896740	646816170	0
79	30	24	330	1920	46200	328440	49448070	0	609237090
83	24	48	90	300	9660	309960	151127130	3803520	0
89	12	264	90	3570	14070	1106700	11321310	2467294830	0
97	6	42	780	510	33390	99960	31981950	8264135880	0
101	6	96	180	3990	1683990	3227070	9649080	54153939840	0
103	24	60	90	38610	1444170	4620	20656860	0	0
107	60	42	120	30	1490370	10307220	296744280	688876020	0
109	42	174	660	3420	214620	498750	1346520	5652967320	0
113	84	18	60	67620	2520	5939010	2044350	1012410	0
127	36	12	210	330	210840	9989070	38136420	73236240	0
131	18	60	1230	7980	87150	1360380	351761970	535000410	0
137	90	60	30	9930	90090	10418100	7980	0	0
139	12	174	630	17310	392490	2230410	21036330	0	0
149	24	84	2850	450	116970	340830	440771100	66625819260	0

表10-2

p	t=3	4	5	6	7	8	9	10	11
151	6	60	30	10980	311640	8290380	268858590	0	0
157*	36	42	210	150	5250	716100	37590	73315362120	0
163	18	108	1500	660	135030	984690	211309560	79639560	0
167	6	30	510	4290	5880	1813770	872177670	17258030790	0
173	54	60	1050	8610	154770	9870000	3008460	0	0
179	102	84	5670	630	210	2241330	123752790	0	66603927390
181	48	30	1560	41460	50400	861210	440391630	11548817280	0
191	36	126	630	5910	3019170	1223040	112215600	9937437510	0
193	18	90	450	630	420	78960	31783290	41199178020	0
197	30	162	900	1680	193830	3580500	60100320	571549230	39436627230
199	12	264	420	5880	150780	9240	24976980	210	0
211	30	390	540	6090	8610	272790	24751650	64781640	0
223	54	108	150	300	168210	41124090	178355730	77334006750	0
227	6	12	3540	360	648690	486570	33325950	18187429260	0
229	42	270	510	390	325710	8723190	67922820	18686798130	0
233	18	78	1260	7590	105630	461370	73950240	208092150	0
239	12	54	690	120	223440	8334480	89986050	0	0
241	90	36	570	3300	27720	16420950	545551440	43655151540	0
251	30	6	780	5460	65730	6424110	313734540	0	86845138380
257	6	12	720	210	270480	2636760	685530300	77344096830	0
263	48	198	240	5310	361830	530040	4268670	18382770	0
269	12	150	1020	570	3952410	28318290	30826950	0	43060497480
271	6	186	1980	45990	77490	140490	8048040	620925690	0
277	36	60	30	690	8190	2777040	404250	12320678370	0
281	138	36	540	120	38430	3517080	1081080	0	0
283	24	180	600	4140	767340	300300	150314850	73734570	0
293	54	108	360	930	112350	166320	223898220	0	0
307	66	30	150	4290	13020	1253070	488768280	0	0
311	78	36	390	15330	99960	1416030	16948470	44892540	10258818570
313	54	18	1560	840	288120	719460	136278450	77507430000	0
317	36	42	330	660	702240	6487110	5560170	65245730550	0
331	18	246	840	240	157080	183750	32212950	3402579180	0
337	30	42	2010	8400	52290	13841100	1122660	16746830100	0
347	6	72	480	39540	55440	1654380	161082180	5806290	0

* d(157, 12) = 203032830

表10-3

p	t=3	4	5	6	7	8	9	10	11
349	192	24	360	3570	41370	1644090	206312400	366917460	21440128710
353	48	78	210	24990	292320	6575520	230206620	80025745800	0
359	42	150	120	30	1260	16933560	119786940	12719146440	0
367	6	120	180	1200	189840	46200	10630620	36030774780	0
373	24	150	4530	1710	422730	2975070	1277430	0	0
379	30	54	120	540	122010	3374490	490770	7202004810	0
383	18	60	300	2940	4200	6074880	3222030	0	0
389	102	60	30	210	16590	3105690	4297020	0	0
397	90	12	1260	180	750750	5699610	176820	74063220	0
401	60	276	30	660	268800	2004660	60948090	42778890	0
409	12	264	420	7920	160650	821730	210	0	0
419	12	24	300	510	374430	14657790	49312830	5867051190	0
421	18	336	900	1800	195510	201600	14670810	0	0
431	18	30	1080	30450	61740	18569460	40390560	2557170	0
433	54	168	720	14070	85680	1628550	3150	0	0
439	24	84	1560	1440	24780	835380	11249490	25033608600	0
443	18	78	1710	1050	49980	3982650	47421150	32340	0
449	30	204	2370	28890	6510	6149010	524187300	0	0
457	42	150	330	44970	119280	989940	94800720	840153930	152492340
461	30	156	420	6090	136080	950880	6394528140	0	0
463	78	138	210	2850	5460	961170	214868220	47031810	0
467	90	12	210	15540	160230	23688630	105000	154128870	0
479	12	120	810	14010	53130	10213770	104193180	0	0
487	60	132	1290	5520	86100	18913440	5375370	0	0
491	78	186	270	330	2378460	248640	30001860	0	0
499	72	24	630	7590	21000	5051970	8055810	75488092680	0
503	180	240	780	90	6300	1989750	239024940	0	0
509	54	84	300	6270	83790	381150	270757410	904270290	0
521	36	66	1050	7770	71820	4986030	9660	21869610	11572360800
523	24	510	300	6270	610470	11197200	101640630	0	0
541	36	66	660	30	8190	8610	947520	916007820	0
547	30	180	1110	7770	2310	4266360	304702860	898319730	0
557	6	42	30	270	8190	19509420	2612610	31919247360	1899607710
563	90	78	990	3570	493290	1912050	454844040	60180120	0

表10-4

p	t=3	4	5	6	7	8	9	10	11
569	192	24	660	10500	2148090	9200100	143314080	32833630830	0
571	36	156	30	42630	36750	1529220	391462890	0	0
577	42	330	180	360	217140	4931850	204190140	186628260	0
587	6	30	360	300	32760	12669090	113564640	0	0
593	24	168	90	12570	99120	1673910	686631330	0	0
599	42	144	210	5670	127050	3844890	245193690	671140470	0
601	126	6	2250	9030	734370	1704360	257447190	64957292400	0
607	6	12	510	3960	143220	11838960	18547410	0	32094742680
613	30	48	270	420	376950	3411660	3438960	238535220	0
617	30	42	1170	1260	44520	1220940	94305960	55887181350	0
619	12	150	390	5610	12180	210	17805480	569327220	0
631	30	60	1740	34860	2730	5168310	2467080	7198800	0
641	18	6	270	60	53760	614460	16788240	99142890	0
643	84	48	2040	2190	967260	8779680	19791450	37806839070	0
647	6	150	570	5610	372540	39401670	449548680	0	0
653	24	318	5490	19140	9660	767970	629029170	0	0
659	42	84	900	3060	55440	13815900	3873660	0	0
661	48	246	2070	2310	28560	437430	17909640	0	91622280750
673	264	18	1800	540	423150	1251390	62584830	11603550	0
677	42	210	1770	66750	1550430	9489480	151660740	0	0
683	18	90	3600	7200	173250	23940	167580	49070641620	0
691	18	186	1440	2940	63000	277200	882172410	0	0
701	126	246	60	120	386190	16070670	2488710	185585400	9902970
709	24	114	4200	2520	8610	117180	134334480	6017651640	0
719	192	54	2940	2280	1765050	240240	636090	114897930	0
727	6	42	1410	1560	180810	296520	9318750	758417100	0
733	144	18	1350	15330	1924230	4318650	77640990	95944708860	0
739	72	84	2340	1260	312060	12561780	42790650	128553810	0
743	84	288	120	420	143640	2552550	336149520	0	36673560
751	18	36	2520	30030	8400	2661750	589680	0	0
757	126	180	120	2100	1125600	6364050	343057680	76511515080	0
761	48	60	810	2730	91350	3208800	20184990	66553807320	0
769	42	84	990	20250	29190	354900	204590820	107040570	21386885520
773	24	138	810	6930	21420	7197120	151711560	212896530	64432067700

表10-5

p	t=3	4	5	6	7	8	9	10	11
787	36	150	4170	11490	992250	7126350	63567210	78558029550	0
797	12	30	5130	6930	1027950	10459680	259730520	4215371160	0
809	72	210	630	3420	1402590	8935080	226951830	0	0
811	48	156	720	510	2730	6666450	71751750	0	0
821	18	66	120	12000	584220	879270	8803410	0	0
823	30	300	240	8040	55020	4407270	288749580	311430	0
827	30	390	270	14190	73920	7868070	328440	0	0
829	24	54	2940	4140	210	15826860	13133190	47890920	0
839	72	24	570	1050	225960	113820	33993120	76706499870	0
853	84	198	300	2400	76860	33213600	993070260	0	0
857	96	120	1020	14910	10920	39114390	288621690	85057212240	30563610
859	24	270	210	2310	122430	4991910	4339440	0	0
863	24	78	2220	29430	442890	367290	690690	41477826390	0
877	60	120	30	14940	752430	36511650	13177920	0	0
881	48	30	2820	20040	123060	210	18690	787493070	0
883	54	270	330	80340	76440	17716860	169439130	77290290	0
887	66	42	300	1020	59850	138180	4639950	69294585360	0
907	90	30	11130	3000	339150	114870	614255460	6573657090	0
911	18	36	60	1170	2614920	5250630	15959580	354566520	0
919	72	204	540	26880	560490	2500050	107485560	254233980	0
929	12	84	510	1020	613830	2678340	158948790	22025293290	0
937	30	672	360	1350	38220	670320	9240	200270070	0
941	6	36	1410	3780	490140	2268420	134474340	8904465570	0
947	36	72	240	57990	3570	775110	82533990	51010219260	0
953	30	78	2580	4950	669900	6476190	211154790	0	0
967	102	42	690	1800	102690	3409350	310664970	4004800800	56885228400
971	6	60	1140	83550	18690	1818180	12985140	23752949220	0
977	36	42	660	1320	231630	2516220	62092590	15429353940	0
983	120	168	1860	2940	74760	2207100	12028590	343278390	0
991	30	336	1290	1320	14070	869820	436603860	411087810	0
997	36	12	1020	1680	371070	721980	83774040	74214840	0