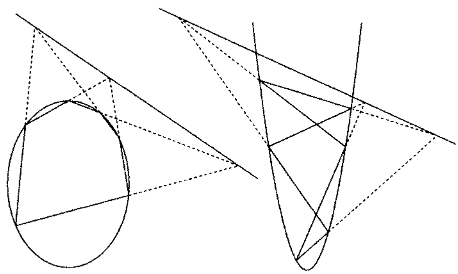
パスカル『円錐曲線試論』対訳と注解

久木田 英史



解題 ブレーズ・パスカル(1623-1662) にとって初の印刷公刊物『円錐曲線試論』*Essai pour les Coniques*[*1] (1640) は、『パンセ』の作家が生前発表した極めて稀な幾何学研究でもある。一枚の掲示として少数の定義と補題、研究計画の素描だけが記されたこの単純な著述は、任意の円錐曲線(楕円・放物線・双曲線等、立体図形である円錐を一平面で切断して得られる平面図形)に内接する任意の六角形における、三組の対辺の交点の共線性(同一直線上の存在)という驚異的な「パスカルの定理」、またその定理に基づく射影幾何学的な円錐曲線研究の展望が初めて印刷物上に表明されたものとして、数学史上、格別の重要性を持つ。発表形式の制約に由来する極度に簡潔、晦渋な文体もあり、神童16歳の小品は、殊更に綿密な考究に値しよう。

*1. Pascal, *Œuvres complètes*, 2 vol., 1998-2000, éd. par Le Guern, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard (以下 *Pascal* と略記), t.I, p.111-116. 小論は上記ルゲルン版パスカル全集に収録された資料の他、Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 1837, Hayez, Bruxelles (以下 *Chasles* と略記)、René Taton, « *L'Essay pour les Coniques* de Pascal » in *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 8-1, p.1-18, 1955 (以下 *Taton* と略記。http ://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1955_num_8_1_3488 にて閲読可)に多くを負う。

『円錐曲線試論』以後パスカルがこの分野で重ねた研究は『円錐曲線研究大全』*Conicorum opus completum* として集大成された。『大全』の原稿は著者の没後の 1675 年、ほぼ完成された形で、甥のエチエンヌ・ペリエからパリ滞在中のライプニッツに委ねられたとされるが、そのうち今日まで伝わるのは、後者が作成させた断片的な写し（『円錐曲線の生成』*Generatio conisectionum*）に留まる[*2]。これと『大全』の最初の要約草稿と考えられる『試論』を除けば、残された資料は

・ライプニッツが原稿読解の結果を説明するペリエ宛書簡の草稿[*3]

・原稿読解の際ライプニッツとその友人チルンハウスの残した注[*4]

・パスカルが「高名なるパリ数学アカデミー」に宛て、『大全』を含め、自然科学に関する自らの研究テーマを列挙する、1654 年執筆と推定される献辞[*5]

等に限られ、パスカルの最終的な研究結果について、現存の断簡零墨からは茫漠たる影が望見されるのに過ぎない。『大全』が散逸しただけに一層、『試論』はその真正の草稿として、後世にとって貴重である。

『円錐曲線試論』の執筆された詳しい状況も知られていない。ペリエ家に嫁いだ姉ジルベルトが綴った弟の伝記には、少年時代のブレーズの幾何学との出会いが物語られている。天賦の才に恵まれながら早世した肉親への愛惜に溢れた名品とはいえ、12 歳の少年が誰の教えもなく、エウクレイデス（ユークリッド）『原論』の最初の諸命題を『原論』の順序のままに見出したとは、素直には信じ難い[*6]。家族の記憶にそうし

---

*2. *Ibid.*, p.117-128. 注 3 参照。

*3. *Ibid.*, p.129-131. ライプニッツはそこで、『大全』が 6 部構成になるものと推定している。すなわち第 1 部が上記『円錐曲線の生成』、詳しくは『円錐曲線・接線・割線の生成、すなわち円の周・接線・割線の、任意の眼・平面・絵画の位置への射影』*Generatio conisectionum, tangentium et secantium ; seu projectio peripheriae, tangentium, secantium circuli in quibuscumque oculi, plani, tabellae positionibus*、第 2 部が『神秘の六角図形と円錐曲線について』*De hexagrammo mystico et conico*、第 3 部が『4 本の接線と、それらの接点を結ぶ直線について。調和比で分割された直線と直径の諸性質の起源』*De quatuor tangentibus et rectis puncta tactuum jungentibus, unde rectarum harmonice sectarum et diametrorum proprietates oriuntur*、第 4 部が『割線・接線の線分の比について』*De proportionibus segmentorum secantium et tangentium*、第 5 部が『円錐曲線の接点・接線について』*De tactionibus conicis*、第 6 部が『立体の軌跡について』*De loco solido* とされる。

*4. *Ibid.*, p.132-139.

*5. *Ibid.*, p.171-173. 幾何学関係では『アポロニオスのフランス式敷衍』*Promotus Apollonius gallus*、『球面の接点・接線』*Tactiones sphaericae*、『円錐曲線の接点・接線』*Tactiones conicae*、『立体の軌跡』*Loci solidi*、『平面の軌跡』*Loci plani*、『円錐曲線大全』*Conicorum opus completum*、『透視図法』*Perspectivae methodus* が挙げられる。

*6. *Ibid.*, p.64-65. ジルベルトによれば、ブレーズは内接六角形の定理の発見によりアルキメデスの若き再来と騒がれながら、名声を嫌って論文を公表しなかったことになっている。

た誇張された印象を刻むほどの神童ぶりだったというのが、恐らく真相なのだろう。いずれにせよ、ブレーズは12歳から13歳にかけてこの学問と初めて出会い、それが彼にとって生涯離れ得ない魅惑となったのだった。間もなく彼は、数学に通じた父エチエンヌ[*7]に連れられ、メルセンヌ神父が毎週自らの修道院で主宰する第一級の学者たちの例会（後のフランス王立科学アカデミー）に足を運ぶようになる。そこでは新たな学問的成果に伴う諸問題が討議されていたのだが、数学上の主題として特に期待と関心を集めたのが、カヴァリエリにおいて華々しい成果を見、その後パスカル壮年期のサイクロイド研究も経て、ニュートン・ライプニッツにおいて積分法として結実することになる不可分量（無限小）計算、あるいは代数学の幾何学への応用、すなわちデカルトが『方法序説』の三試論の一つ、『幾何学』においてその威力を示現した解析幾何学である。そうした雰囲気の中で、代数学を含まない純粋幾何学に関心を寄せるアカデミーの学者といえば、古代ギリシャにおける円錐曲線論の大成者、ペルガのアポロニオスの伝統に忠実なクロード・ミドルジュ、あるいは射影の概念を基礎に、ルネサンス期に発達した絵画技法としての遠近法を踏まえて新たな幾何学を大胆に開拓しつつあったジラール・デザルグに限られていた。

裕福な行政官としての職務の余暇に数学や自然学を嗜んだミドルジュは光学への造詣が深かった他、娯楽としての数学問題集を一冊ならず著したことで知られている。彼が完成したフランス初の円錐曲線論 (1631) は古典的な形式で、アポロニオスの命題の証明の大幅な簡約化に成功する等、自身の研究成果にも欠かなかったとはいえ、他の学者の興味を長く引き留めるには至らなかったようである[*8]。

他方、従軍技師・建築家としての経歴を持つデザルグは1639年、すなわち『円錐曲線試論』に先立つこと一年、『円錐の平面との交わりの生起達成計画草稿[*9]』（以下『計画草稿』と略記）と題された論文をメルセンヌのアカデミーで発表、これがブレーズ少年の深い共鳴を得るところとなる。円錐曲線の理論だけでなく、遠近法から石切り法、日時計設計に至る諸技術の革新を目論んでいたデザルグの教養と見識は識者たちの認めるところではあったが[*10]、彼の作品に盛り込まれた発想と陳述の独自性は、同時代人の多くを戸惑わせるに足るものだった。デカルトは『計画草稿』を賞賛する

*7. 「パスカルの蝸牛」limaçon de Pascal（螺旋曲線の一種）に名を留めている。

*8. *Chasles*, p.88-89.

*9. Girard Desargues, *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, 1639. http ://gallica.bnf.fr/ark :/12148/ bpt6k105071b (以下 *Desargues* と略記) にて閲読可。

*10. パスカルの自然科学研究において理論面と実践面とが一対の両輪を成していることを、ルゲルンはデザルグからの影響と見ている。*Pascal*, t.I, p.1033.

デザルグへの書簡において、相手の語法について

> 新たな用語を用いる必要はないと私は思います。学者はアポロニオスの用語に慣れていて、たとえ改善されたものでも、そう簡単に乗り換えはしないでしょうし、あなたの用語では折角の証明が他の者には分かり辛くて、読む者がいなくなるのではないでしょうか*11。

またその方法について

> （学者でない者に）証明をもっと分かり易くするためには、私が『幾何学』でそうしたように、算術の用語や計算を用いる方が良くはないでしょうか。掛け算の何たるかを知る者の方が、複比の何たるかを知る者よりずっと多いのですから*12。

と率直な感想を述べている。あるいは当代ヨーロッパ随一の数学者と言うべきフェルマーがメルセンヌに宛てた

> デザルグ氏は自分一人で独自の円錐曲線論を考案したのですから、私は氏を高く評価しています。氏の冊子は隠語だと世に言われているとのことですが、私にはとても分かり易く、素晴らしいものに思えました*13。

という賛辞も、却ってデザルグに対する一般の無理解を物語るものであろう。各自の興味関心ゆえに結局はデザルグの理論に深く関与することの無かった二人の大数学者を除けば、デザルグが幾何学とその応用にもたらした斬新な思考を確かに受け止め得た同時代人は恐らく唯一人、例会の最年少者、ブレーズ少年を措いて他に無い*14。デ

---

*11. « Il ne me semble pas qu'il soit nécessaire d'y employer aucun nouveau terme : car les doctes, étant déjà accoutumés à ceux d'Apollonios, ne les changeront pas aisément pour d'autres, quoique meilleurs, et ainsi les vôtres ne serviraient qu'à leur rendre vos démonstrations plus difficiles et à les détourner de les lire. » Lettre de Descartes à Desargues, du 19 juin 1639, Descartes, *Œuvres complètes*, 11 vol., éd. par Adam et Tannery, 1996, Vrin (以下 *Descartes* と略記), t.II, p.554. デザルグは自らの理論の応用を意欲ある職人たちに伝えることに情熱を傾けて私設の塾を開いていた。『計画草稿』でも彼らに親しみ易い日常語が術語として用いられ、例えば円錐は「角笛」cornet、円柱は「柱」colonne 等と呼ばれた。*Ibid.*, p.556. 【注解 12】も参照。

*12. « Il me semble que, pour rendre vos démonstrations plus triviales, il ne serait pas hors de propos d'user des termes et du calcul de l'arithmétique, ainsi que j'ai fait dans ma *Géométrie* ; car il y a bien plus de gens qui savent ce qu'est multiplication, qu'il n'y en a qui savent ce que c'est que composition de raisons. » *Ibid.*, p.555. 複比については【注解 3】補題 E を参照。

*13. « J'estime beaucoup M. Desargues, et d'autant plus qu'il est lui seul inventeur de ses coniques. Son livret qui passe, dites-vous, pour jargon, m'a paru très intelligible et très ingénieux. » *Chasles*, p.79.

*14. 「デザルグの天才を、同時代人のうちデカルト、フェルマー、パスカルという最も卓越した人びとは高く評価したが、デザルグの斬新さや一般性に理解の及ばない凡人たちは嫌悪し、迫害した。」*Ibid.*, p.88.

ザルグが射影幾何学的考察を通じて企てた円錐曲線の包括的な理論を、パスカルは単に理解しただけでなく、やがて彼自身、『円錐曲線試論』の告げる、デザルグとは別の道を通じて、新たに築き直そうと志したのである。少年が自らの研究計画を準備していた頃の、彼とその先駆者との関係が如何なるものであったか、詳細を伝える資料は残されていない。一つ確かなのは、パスカル自身がデザルグを自らの模範と明確に認めていることであるが、彼の試論の形式と内容について、尊敬する先達から何がしかの具体的な助言を受けたのか、真相は知り難い。デザルグはメルセンヌの周囲に集う人々の一人で、ペリエ夫人の伝えるところでは、彼らは 1639 年から 40 年の冬、少年に自らの発見を公表するよう勧めたというが [*15]、デザルグが自らの若い弟子の作品を評価するのに最も適任だっただけでなく、自らの功績を高く評価する著作が出版されるというのは、デザルグの自尊心を擽ることでもあっただろうと、今日では唯、想像されるだけである。パスカル後年の『パンセ』にデザルグの名が触れられ、自分の領地で採れた葡萄をパスカルに贈っていたらしいこともあり [*16]、両者はその後も良好な関係を保ち続けたのだろう。

こうした伝記的事実の断片に触れた上で、以下、本文を検討しよう。詳細は注解に委ねるとして、ここでは全般的な指摘に留めたい。

『円錐曲線試論』の原本は 50 部印刷され、そのうち 1 部がパリ国立図書館に [*17]、1 部がハノーファー州立図書館に [*18] 現存している。大きさは 35cm × 43cm、片面印刷の掲示用紙である。印刷場所等の表記はないが、これはその印刷物が、パスカルやメルセンヌの知人に限って渡されることになっていたという事情による。こうした配布先の狭さゆえ、『円錐曲線試論』は 17 世紀の数学者の多くに知られることもなく、パスカルの全集に収録されるのも 18 世紀後半、ボシュ神父による版 [*19] を待たなくてはならなかった。当時広く行われた習慣により、著者名は頭文字 B. P. に限られるが、これはパスカルにとって『試論』が最初の草稿に過ぎず、準備中のより広範な著述への反応を予め探っておくのが主目的だったという事実にもよる。

本文は 3 個の「定義」に始まり、爾後の円錐曲線研究の基礎となるべき 3 個の「補題」と簡潔な研究計画が続く。この最後の部分では自らの方法が「通常にまして普遍

*15. *Pascal*, t.I, p.66.
*16. *Ibid.*, t.II, p.753.
*17. Imprimés, Réserve, V 859-860.
*18. Leibniz-Handschriften, Ableitung XXXV-XV.
*19. *Œuvres de Pascal*, 5 vol., 1779, éd. par Bossut, Detune, La Haye.

的」であることを示すべく、5個の「定理」、また扱われるべき問題の幾つかが紹介される。それ以外の「問題や定理、そこからの帰結」もあることが告げられた上で、概要の素描された作品について、読者の意見が乞われる。提示された諸命題について、証明は一切与えられないが、これは『試論』が単なる掲示物に過ぎず、口頭発表または本格的な著作での敷衍が前提となっているからであろう。

第1定義はデザルグの『計画草稿』に由来する複数の直線の「配置」ordonnance（今日定着している術語では「束」faisceau）で、そこでは平行線が無限遠点で交わるという射影幾何学的な前提の下、平行線の線束が有限遠の1点で交わる線束と同等に扱われる。パスカルは直線の「秩序」ordre という用語をより相応しいと考えているようである。第2定義は「円錐曲線」section de cône で、2直線の線束という特殊な場合も含め、円錐曲線全般が扱われることが告げられる。円の場合と、円を包摂する楕円の場合とが殊更に区別されるが、これは円錐曲線の諸性質が、最初に円という証明の容易な特殊な場合で示され、次いで射影により一般の場合に拡張されるという、後の陳述上の便宜のために他ならない。第3定義は単なる言葉遣いの問題である。

第1補題では六角形に関する「パスカルの定理」として今日に伝わる命題が、円の場合として、今日知られているのとは異なる形で述べられる。第2補題は空間図形についての基本的な命題で、第3補題において第1補題が円錐曲線一般の場合に拡張される際の根拠となる。

パスカルはその後、これらの補題とその帰結から、曲線の直径や接線の性質、作図法等、円錐曲線に関する包括的な論述を導く意向であることを告げ、彼の方法が「通常にまして普遍的」であることの例として、5個の定理を掲げる。詳細は注解に譲るとして、第1定理では円錐曲線の射影的性質が述べられる [*20]。第2定理は複数の命題を含み、前半ではメネラウスの定理 [*21]、複比の不変性 [*22]、後半ではカルノーの定理 [*23] の特殊な場合が述べられる。第3定理も同じカルノーの定理の別の特殊な場合である。第4定理はデザルグの円錐曲線理論の要、6点の対合定理 [*24] で、パスカルはここで師への賛辞を惜しまない。第5定理は共役直径、すなわち主軸・副軸の直径が与えられた円錐曲線を表す、デカルト座標における方程式の標準形に対応する。こ

*20. 【注解3】補題Gの一般化である。
*21. 同、補題D参照。
*22. 同、補題E参照。
*23. 【注解9】参照。
*24. 【注解12】参照。

れらの定理は、最初に円の場合で証明され、次いで射影により一般の場合に拡張されたとも、内接六角形の定理から直接演繹されたとも考えられる。パスカル独自の命題と言えるのは第 2 定理の後半と第 3 定理で、他は多かれ少なかれ、パスカルの同時代人に広く知られていたものである*25。

最後にパスカルは、接線や直径等について、自らの方法によって扱い得る幾つかの作図題を示す。

証明を一切含まない不完全な記述から、パスカルの企ての成否を判断するのは困難であるとはいえ、3 個の補題にその方向性が示唆されている統一的方法によって、彼が古代ギリシャ以来の理論を再構築するという壮大な意図を抱いていることは疑えない。全ての基礎となるのは第 3 補題、円錐曲線に内接する六角形の定理である。第 1 補題は証明の容易な、その特殊な場合で、第 2 補題は射影の概念により、第 1 補題から第 3 補題への橋渡しをする。第 3 補題にパスカルが与えた重要性は

> こちらのとある若者の『円錐曲線論』の紙面をお送りしたと思うのですが、これがまた優秀な幾何学者で、弱冠 18 歳ながら、アポロニオスの円錐曲線論全体をたった 1 個の命題で包摂し、その命題から 400 もの系を導いて見せるのです。その最初から最後まで、どの一つとして互いに依存し合うものは無く、全てがその 1 個の命題に掛かっているのです*26。

というメルセンヌの証言からも覗える。『円錐曲線研究大全』という包括的な著述が散逸したとはいえ、円錐曲線論におけるパスカルの定理の重要性に照らして、少なくともその発想の源に思いを致すことは、今日でも十分可能であろう。

『円錐曲線試論』について下される判断は、どのような姿勢でこの作品に接するかに大きく左右される。単に示唆されたに過ぎないパスカルの方法の「普遍性」を無視して、そこに見出される内容だけから判断し、更に著者がデザルグに多くを負うことを自ら認めていることを考えれば、真に独自な要素としては、内接六角形の定理が、それと認め難い形で述べられているだけである。デカルトはこうして

> 円錐曲線についてアポロニオスより容易く証明する者があるのは不思議ではあ

---

*25. *Taton*, p.8.

*26. « Nous avons ici un jeune homme, dont je crois vous avoir envoyé une feuille des *Coniques*, lequel est si excellent géomètre, n'ayant que 18 ans, qu'il a compris toutes les sections coniques et l'*Apollonius* dans une seule proposition, de laquelle il dérive tellement 400 corollaires que pas un ne dépend l'un de l'autre, mais tous, aussi bien le dernier que le premier, de ladite proposition. » Lettre de Mersenne à Théodore Haak, du 18 novembre 1640, *Pascal*, t.I, p.1034.

りません。実際、アポロニウスは長たらしくて混乱していて、しかもその証明していることはそれ自体十分簡単です。ですが、16歳の少年には手の付けられないような円錐曲線の他の命題を出すことも可能です*27。

あるいは

パスカル氏のご子息の『円錐曲線論』を受け取り、半分も読まないうちに、デザルグ氏から教わったものだと判断しました。そのことは直ぐに、本人の告白で確かめられました*28。

等、神童の作品に始終冷淡な態度を貫いたのだった。逆にメルセンヌの証言の示す通り、パスカルがこの時期既に、『試論』で素描した野心的な計画の、少なくとも一部を実現していたと認めるならば、評価は全く違ったものになる。その場合はパスカルを、デザルグという時代に先駆けた数学者の、壮大かつ斬新な幾何学の構想を的確に理解し得た、極めて稀な弟子であったと考えるべきであろう。実際17世紀の数学者で、『計画草稿』という画期的な作品を自家薬籠中のものとし、その後を追い得た者は、ほぼ絶無に近い*29。デザルグやパスカルの円錐曲線論はデカルト流の解析幾何学の隆盛もあって次第に忘れられ、幾何学の表舞台に蘇るにはフランス革命期以降、モンジュ、カルノー、ポンスレ等を嚆矢とする射影幾何学の新たな展開の時代を待たなくてはならなかった。

最後に『円錐曲線試論』の成功を阻んだ一因として、尋常ならざる数の誤植を指摘しておこう。ごく短い文面ながら、考察対象の図形を定義する記号の間違いが十指を下らないだけでなく、単語の書き落としや綴り違いまで見受けられる。また図形の一つには複数の命題の要素が全て盛り込まれ、その上、あるいは命題にとって本質的な点や線分が欠落し、あるいは図中の記号が命題の文面中の記号と対応していないとあっては、判読は極めて困難である。この欠陥は恐らく著者の経験不足によるもの

---

*27. « Je ne trouve pas étrange qu'il y en ait qui démontrent les coniques plus aisément qu'Apollonios, car il est extrêmement long et embarrassé et tout ce qu'il démontre est en soi assez facile. Mais on peut bien proposer d'autres choses touchant les coniques qu'un enfant de seize ans aurait de la peine à démêler. » Lettre à Mersenne du 25 décembre 1639, *Descartes*, t.II, p.627-628.

*28. « J'ai reçu aussi l'*Essai touchant les coniques* du fils de M. Pascal et, avant que d'en avoir lu la moitié, j'ai jugé qu'il avait appris de M. Desargues, ce qui m'a été confirmé incontinent après par la confession qu'il en fait lui-même. » Lettre à Mersenne du 1er ou 2 avril 1640, *Ibid.*, t.III, p.47.

*29. 『円錐曲線試論』以降1672年（Philippe de la Hire, *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques*）に至るまで、デザルグの幾何学が表立って取り上げられることはなかった。*Taton*, p.4.

で、同時代人の気付くところでもあった*[30]。ボシュは全集に『円錐曲線試論』を収録するに当たり、誤植の訂正の労を厭わなかったが、以後の版も、必ずしも全てその模範に従っている訳ではない*[31]。

以下のフランス語原文はタトン版 (1955) とルゲルン版 (1998) を元に、数学文書として可能な限り首尾一貫していることを趣旨として作成し*[32]、1640 年版との異同を示した。初版の綴字には揺れがあるため*[33]、表記は現代語化した*[34]。図はパスカル自身による未訂正のものの復元（Fig. 1, 2, 3）を原文に添え、各命題に対応するもの（Fig. 1a, 1b, 1c, 1d, 1e. 1f）を翻訳の一部として補った。それぞれの命題には注解の一部としてその証明を掲げたが、これは文面の数学的な意味について、後世の読者として当面の理解を得るためのものである。パスカル自身の思考過程の跡を辿ることを許す資料は、今日知られていない。

* * *

ESSAI POUR LES CONIQUES par B. P.

Définition Première

Quand plusieurs lignes droites concourent à même point, ou sont toutes parallèles[a] entre elles, toutes ces linges sont dites de même ordre ou de même ordonnance, et la multitude de ces linges est dite ordre de lignes, ou ordonnance de lignes.

【異同】 *a*. parelles (1640) より訂正。

【試訳】

*30. 「誤植と思われる 6 個の間違いが見出された。[...] 証明の根拠となるべき仮定や四角形の辺が損なわれている。[...] 3 個の図のうち第 1 図で直線 PQ, NO が欠けているのは、版木師の手違いである。」Huret, *Optique et portraiture*, 1670, *Taton*, p.10.

*31. 注 19 参照。「フランスの大作家」叢書版全集（14vol., 1904-1914, éd. par Brunschvicg, Gazier et Boutroux, coll. des Grands Écrivains de la France, Hachette, t.I, p.243-260）では、1640 年の文面をパスカルの印刷公表した唯一のものとして、そのままの形で収録している。メナール版全集 (5 vol. parus, 1964-1999, éd. par Mesnard, Desclée et Brouwer) では、パスカルの見落としと印刷所の不注意との区別が試みられているが、両者の境界は微妙である。*Pascal*, t.I, p.1031.

*32. 参考とした 2 版の誤植については注 46 と注 51 を参照。

*33. diamettre / diametre (diamètre), droite / droicte, escrit / escript (écrit), point / poinct, etc.

*34. demonstrer (démontrer), elipse (ellipse), quarré (carré), subjet (sujet), etc. ルゲルン版では古語風なまま残された現在分詞の一致も現代語化した。

円錐曲線試論　B. P. 著

定義 1

複数の直線が同一の点で交わるとき、あるいは互いに平行であるとき、これらの線は同一の配置、または同一の秩序に属するという。また、これらの線の集まりを線の秩序、あるいは線の配置という。

【注解 1】 デザルグは『計画草稿』の冒頭で

> 複数の直線について、それらがあるいは互いに平行か、あるいは全て同一の点へと傾いているかであることを示すために、ここではそれらの直線が互いに同一の「配置」ordonnance に属するという。これらの直線について、上に述べた 2 種類の位置のいずれにあっても、同一の場所に向かっていることが了解されよう [*35]。

と述べている。パスカルは直線の「秩序」ordre という用語をより相応しいと考えているようである。今日定着している術語としては「束」faisceau という。平行線が無限遠点で交わるという射影幾何学的な前提（この前提は、複数の平行な直線が眼から遠ざかるにつれ次第に 1 点に集まっていくように見えるという視覚現象に対応する）の下、平行線の線束が（有限遠の）1 点で交わる線束と同列に扱われる。

* * *

Définition II

Par le mot de section de cône, nous entendons la circonférence du cercle, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole et l'angle rectiligne, d'autant qu'un cône coupé parallèlement à sa base, ou par son sommet, ou des trois autres sens qui engendrent l'ellipse, l'hyperbole et la parabole, engendre dans la superficie conique, ou la circonférence d'un cercle, ou un angle, ou l'ellipse, ou l'hyperbole, ou la parabole.

Définition III

---

*35. « Pour donner à entendre de plusieurs lignes, qu'elles sont toutes entre elles ou bien parallèles, ou bien inclinées à même point, il est dit ici que toutes ces droites sont d'une même *ordonnance* entre elles, par où l'on concevra de ces plusieurs droites, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux expèces de position, elles tendent toutes à un même endroit. » *Desargues*, p.1. 強調は 1639 年版の文面による。

Par le mot de droite mis seul, nous entendons ligne droite.

【試訳】

定義 2

円錐が底面と平行にか、頂点を通ってか、楕円、双曲線、放物線を生む異なる 3 方向のいずれかに切断されたのに応じて、円錐の表面に、あるいは円周、あるいは 2 直線の成す角、あるいは楕円、あるいは双曲線、あるいは放物線を生む限りにおいて、円錐曲線という語を、円周、2 直線の成す角、楕円、双曲線、放物線と解する。

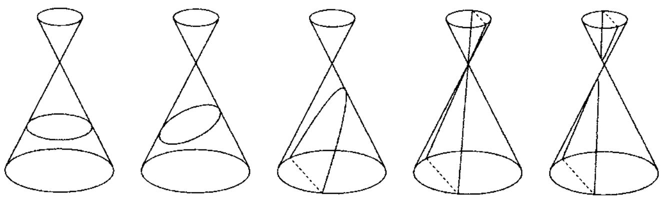
定義 3

単独の droite（真直ぐ）という語を、直線と解する。

【注解 2】 ある平面 π において点 O を中心とする円を考える。π 上にない点 S をとれば、S と円周上の各点とを結ぶ、双方向に無限遠な直線の線束は、S を頂点に対向する二枝の円錐を成す。π 上の円を、その円錐の底面という。特に S が底面の中心 O を通る π の垂線上にある場合、その円錐を正円錐といい、そうでない場合、斜円錐という。

あるいは点 S で交わる 2 直線を考える。一方の直線を軸に他方を回転させると、上と同様、二枝の正円錐が生成される。回転により円錐面を生成する側の直線を母線という。（頂点を除く）円錐面上の任意の点と頂点とを結ぶ直線は、円錐の母線と考えられる。

こうして得られた円錐を、π と異なるある平面 π' により切断すると、π, π' の成す角に応じて、定義で列挙された様々な平面図形が円錐面に現れる。



切断面の図形としては他に 1 点（切断面が円錐の頂点のみを含む場合）、1 直線（切断面がある母線において円錐に接する場合）が考えられ、『円錐曲線の生成』ではこ

れらも列挙されている。他方、ここで区別されている円と楕円が、『円錐曲線の生成』では parabola（放物線）や hyperbola（双曲線）と語尾を合わせ、antobola（恐らくパスカルの造語）として一括されている*36。π と円錐の母線との角を θ、π と π' との角を η とすれば、θ と η との大小関係に応じて、生成される図形は以下のようになる。

	$\theta > \eta$	$\theta = \eta$	$\theta < \eta$
切断面が頂点を通らない	円・楕円	放物線	双曲線
切断面が頂点を通る	1点	1直線	2直線

* * *

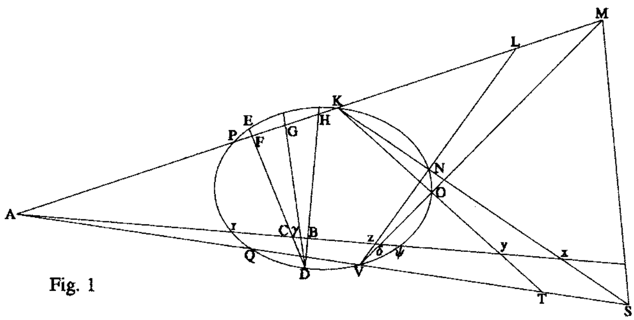


Fig. 1

LEMME I

Si dans le plan MSQ, du point M partent les deux droites MK, MV, et du point S partent les deux droites SK, SV, et que K soit le concours des droites MK, SK, et V le concours des droites MV, SV, et A le concours des droites MK, SV[a], et μ le concours des droites MV, SK, et que par deux des quatre points A, K, μ, V, qui ne soient point en même droite avec les points M, S, comme par les points K, V, passe la circonférence d'un cercle, coupant les droites MV, MK[b], SV, SK ès points O, P, Q, N, je dis que les droites MS, NO, PQ sont de même ordre.

【異同】 *a.* MA, SA (1640) より訂正。*b.* MP (1640) より訂正。またパスカルによる図

---

*36. « Occurrere autem sex modis possunt planum et superficies conica. [...] Sunt ergo sex conisectionum species : punctum, recta linea, ang. rectalineus, antobola, parabola, hyperbola. » *Pascal*, t.I, p.119-120.

では直線 MV, SK の交点 μ の記号が脱落し、直線 NO, PQ が引かれていない。

【試訳】

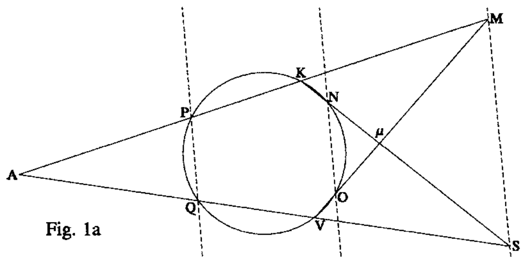


Fig. 1a

補題 1

平面 MSQ において、点 M から 2 直線 MK, MV が発し、点 S から 2 直線 SK, SV が発するとし、K を直線 MK, SK の交点、V を直線 MV, SV の交点、A を直線 MK, SV の交点、μ を直線 MV, SK の交点とし、点 M, S と同一直線上にない 4 点 A, K, μ, V のうち 2 点、例えば点 K, V を円が通り、その円が直線 MV, MK, SV, SK とそれぞれ点 O, P, Q, N で交わるとすれば、直線 MS, NO, PQ は同一の秩序に属する。

【注解 3】 所謂パスカルの定理が円の場合として述べられる。平面上の任意の 2 点 M, S と、その平面に属する円周上の任意の 2 点 K, V をとり、4 直線 MK, MV, SK, SV が与えられた円とそれぞれ点 P, O, N, Q で交わるとし、2 直線 NO, PQ の交点を T とすれば、T は直線 MS 上にある。同じ内容を、今日では次のように述べるのが一般的である。すなわち与えられた円に内接する六角形 ONKPQV の 3 組の対辺の交点、すなわち対辺 KP, VO（の延長 MK, MV）の交点 M、対辺 KN, VQ（の延長 SK, SV）の交点 S、対辺 NO, PQ の交点 T は同一直線上にある（T が無限遠点ならば、MS, NO, PQ は平行である）。

この命題に対してパスカルが考案したとされるユークリッド幾何学的な証明の鮮やかさは、神童の名に真に相応しく思われる [*37]。補題としてユークリッド幾何学の基本的な 3 命題を挙げる。

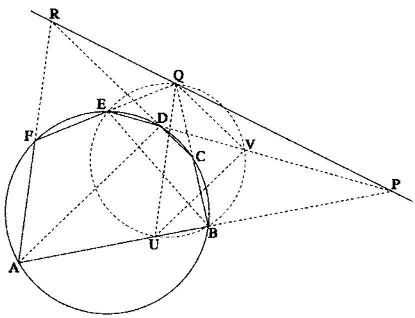
補題 A　円に内接する四角形の内角は対外角に等しい [*38]。

*37. 矢野健太郎『エレガントな解答』1958、法政大学出版局。2007、ちくま学芸文庫、p.120-126。

*38. ユークリッド『原論』第 3 巻命題 22。例えば下図において、四辺形 ABCD について ∠ABC = ∠ADR 等。

補題 B 同一の弧に対する円周角は全て等しい *39。

補題 C 2 個の相似な三角形について、対応する 3 組の辺が全て平行ならば、対応する 3 組の頂点を結ぶ 3 直線は 1 点で交わる *40。



与えられた円 O に内接する六角形 ABCDEF について、直線 AB, DE の交点を P、直線 BC, EF の交点を Q、直線 CD, FA の交点を R とし、3 点 P, Q, R が同一線上にあることを証明する。パスカルの非凡さは、発見が奇跡としか思われない巧妙な補助線に遺憾なく示される *41。3 点 B, E, Q を通る円 O′ を考え、O′ と直線 AB, DE との交点をそれぞれ U, V とする。

1. ∠ADR は円 O に内接する四角形 ABCD の外角なので、補題 A により ∠ADR = ∠ABC = ∠UBQ。∠UBQ は円 O′ の弧 QU に対する円周角なので、補題 B により ∠UBQ = ∠UVQ。以上により ∠ADR = ∠UVQ。

2. ∠DAR = ∠DAF は円 O に内接する四角形 ADEF の内角なので、補題 A により ∠DAR = ∠DEQ = ∠VEQ。∠VEQ は円 O′ の弧 QV に対する円周角なので、補題 B により ∠VEQ = ∠VUQ。以上により ∠DAR = ∠VUQ。

3. ∠PAD = ∠BAD は円 O の弧 BD に対する円周角なので、補題 B により ∠PAD = ∠BED = ∠BEV。∠BEV は円 O′ の弧 BV に対する円周角なので、補題 B により ∠BEV = ∠BUV = ∠PUV。以上により ∠PAD = ∠PUV。

4. **1** と **2** からは △ADR と △UVQ の相似性、**3** からはこれら 2 個の三角形の対応する 3 組の辺の平行性が導かれる。よって補題 C により 3 直線 AU, DV, RQ は 1 点で交わる。ここで AU = AB、また DV = DE なので、3 直線の交点とは AB, DE の交点 P に他ならなず、P は直線 RQ 上にある。(証明終)

---

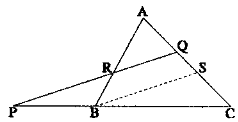
*39. 同命題 21。例えば弧 UQ に対して ∠UBQ = ∠UVQ 等。

*40. 相似三角形の比例関係により容易に証明される。例えば △ADR と △UVQ について、AU, DV, RQ が P で交わる等。

*41. パスカルは数日間に及ぶ苦闘の末、夢に聞いた神のお告げでその補助線を見出し、以来自らの発見を「神秘の六角図形」と呼ぶようになったと逸話に伝えられている。矢野『エレガントな解答』p.126。

もう一個、命題の射影幾何学的意味を浮き彫りにする別の証明を、必要最小限の前提と共に示す*42。こちらの証明の方が、以後の議論の展開により直結する。

補題 D　3点 P, Q, R がそれぞれ △ABC の3辺 BC, CA, AB またはその延長上にあるとき、P, Q, R が同一直線上にあることと



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=-1 \qquad (1)$$

であることとは同等である（**メネラウスの定理**）*43。

証明　P, Q, R が同一直線上にあると仮定し、B を通り PQ と平行な直線が CA と交わる点を S とする。△QPC と △SBC、△ARQ と △ABS はそれぞれ相似で

$$\frac{BP}{PC}=\frac{SQ}{QC},\quad \frac{AR}{RB}=\frac{AQ}{QS}$$

なので

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{SQ}{QC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AQ}{QS}=\frac{AQ}{QA}\cdot\frac{CQ}{QC}\cdot\frac{SQ}{QS}$$

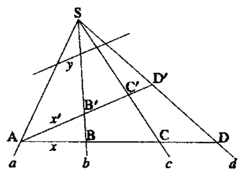
同一線分が逆方向の場合は異符号と考えて、(1) を得る。逆に (1) を仮定して、PQ と AB との交点を R′ とすれば、P, Q, R′ は同一直線上にあるので

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR'}{R'B}=-1$$

これと (1) との比較により

$$\frac{AR}{RB}=\frac{AR'}{R'B}$$

となり、R, R′ は共に AB 上の点なので、R = R′ を得る。（証明終）



補題 E　同一直線上の（通常相異なる）4点 A, B, C, D について、比 AC : BC と比 AD : BD との比

$$\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD} \qquad (2)$$

を A, B, C, D の複比といい、(AB, CD) と表す。1点 S で交わる4直線 a, b, c, d を、S を通らない直線 x によ

*42. 寺阪英孝『初等幾何学 第2版』1973、岩波書店、p.184-188。矢野『エレガントな解答』p.159-194。
*43. **プトレマイオスの定理**ともいう。線分の方向を考慮しない場合、(1) の右辺は 1 とする。

りそれぞれ点 A, B, C, D で切断すれば、複比 (AB, CD) は直線 x の位置に関わらず一定で、これを (ab, cd) とも表す（**複比の不変性**）*44。

証明　y を x と異なる S を通らない直線とし、A を通り y と平行な直線 x' と与えられた直線 a, b, c, d との交点をそれぞれ A′, B′, C′, D′ とする。△ABB′ と直線 c、また同じ三角形と直線 d にメネラウスの定理（補題 D）を適用して

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SB'}}\cdot\frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{C'A}}=-1,\quad \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SB'}}\cdot\frac{\mathrm{B'D'}}{\mathrm{D'A}}=-1$$

両式の比較により

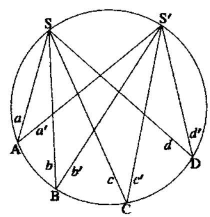
$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{B'C'}}\cdot\frac{\mathrm{B'D'}}{\mathrm{AD'}}$$

すなわち (AB, CD) = (AB′, C′D′) を得る。$y \parallel x'$ なので y による複比は x' による複比に等しく、従って x による複比に等しい。（証明終）

補題 F　1 点 A で交わる 2 直線 x, x' 上にそれぞれ 3 点 B, C, D と B′, C′, D′ があり、(AB, CD) = (AB′, C′D′) ならば、3 直線 BB′, CC′, DD′ は平行であるか、1 点で交わる（**射影幾何学の基本定理**）。

証明　BB′, CC′ が平行ならば、DD′ とも平行なのは明らかなので、3 直線が 1 点 S で交わるとし、直線 SD と x' との交点を D″ とする。このとき複比の不変性（補題 E）により (AB, CD) = (AB′, C′D″) なので、仮定により (AB′, C′D′) = (AB′, C′D″)、よって D′ と D″ とは一致する。（証明終）

補題 G　円周上の相異なる点 A, B, C, D を、円周上の点 S と結ぶ直線を a, b, c, d、S と異なる円周上の点 S′ と結ぶ直線を a', b', c', d' とすれば、$(ab, cd) = (a'b', c'd')$ である（**円の射影的性質**）。



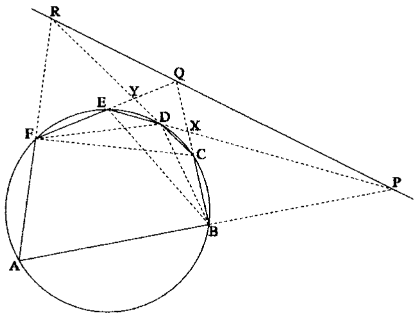
証明　同一の弧に対する円周角は等しい（補題 B）ので

$$\angle\mathrm{ASB}=\angle\mathrm{AS'B},\quad \angle\mathrm{BSC}=\angle\mathrm{BS'C},\quad \angle\mathrm{CSD}=\angle\mathrm{CS'D}$$

すなわち S を交点とする線束（パスカルの用語では「線の秩序」）と S′ を交点とする

*44. パッポス『数学集成』第 7 巻命題 129。アレクサンドリアのパッポスはヘレニズム期を代表する数学者で、その『数学集成』は円錐曲線論も含め、他では散逸した古代ギリシャ数学の精華を伝える貴重な資料である。この命題とデザルグ・パスカルとの関連については *Chasles*, p.34 を参照。パスカルの定理の 2 直線の場合は、パッポスの定理として知られている。

線束とはユークリッド幾何学的な意味で合同、すなわち適当な移動・回転により重ね合わされる。(証明終)



以上を前提に、命題の本体を証明する。先の証明と同じ条件で、直線 CQ, DP の交点を X、直線 EQ, DR の交点を Y とする。

内接六角形の頂点 A, C, D, E を頂点 B と結ぶ直線の線束と、頂点 F と結ぶ直線の線束を考える。円の射影的性質(補題 G)により、B を交点とする線束を直線 EP で切断した点列 P, X, D, E の複比 (PX, DE) と、F を交点とする線束を直線 CR で切断した点列 R, C, D, Y の複比 (RC, DY) とは等しいので、射影幾何学の基本定理(補題 F)により、3 直線 PR, XC, EY は 1 点で交わる。ここで XC = BC、また EY = EF なので、3 直線の交点とは BC, EF の交点 Q に他ならなず、Q は直線 PR 上にある。(証明終)

著者の名を冠する定理として『円錐曲線試論』中最も有名な命題であるが、ここでは補題、すなわち別の命題を証明するための予備命題として扱われているだけで、その上、パスカル自身「神秘の六角図形 hexagramme mystique」と呼ぶほど思い入れがあったとされる内接六角形への言及も全くない。ライプニッツからペリエへの書簡草稿によれば、『円錐曲線研究大全』の一部は「神秘の六角図形と円錐曲線について」のものだったとされ[45]、そこではこの定理が今日のように、内接六角形の表象と共に与えられていたと想像される。

* * *

Lemme II

Si par la même droite passent plusieurs plans qui soient coupés par un autre plan, toutes les lignes des sections de ces plans sont de même ordre avec la droite par laquelle passent lesdits plans.

---

*45. *Pascal*, t.I, p.129. 注 3 参照。

【試訳】

補題 2

それぞれ他の平面と交わるような複数の平面が同一の直線を通るとすれば、それらの平面による円錐切断面上の全ての直線は、先に述べた複数の平面の通る直線と同一の秩序に属する。

【注解 4】 直線 l で 2 平面 π, π' が交わるとすれば、π または π' 上の任意の直線は l と同一平面上にあり、l と平行である（無限遠点で交わる）か、l と（有限遠の）1 点で交わるかのいずれかである。この自明な事実により、次の補題において、パスカルの定理の円の場合が円錐曲線一般の場合に拡張される。

* * *

Ces deux lemmes posés et quelques faciles conséquences d'iceux, nous démontrerons que, les mêmes choses étant posées qu'au premier lemme, si par les points K, V passe une quelconque section de cône qui coupe les droites MK, MV, SK, SV ès points P, O, N, Q [*46] , les droites MS, NO, PQ seront de même ordre, cela sera un troisième lemme.

【試訳】

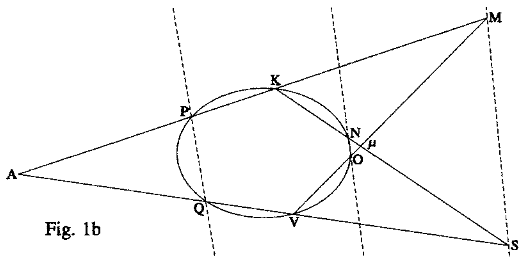


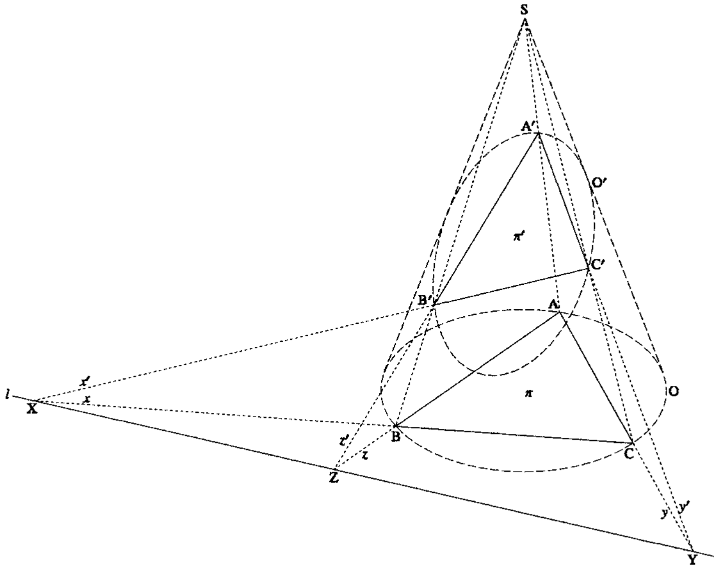
Fig. 1b

これら 2 個の補題とそこから容易に導かれる若干の帰結を前提に、私たちは次のことを証明するだろう。すなわち第 1 補題と同じ条件で、点 K, V を何らかの円錐曲線が通り、直線 MK, MV, SK, SV とそれぞれ点 P, O, N, Q で交わるとすれば、直線 MS,

*46. ルゲルン版では « coupant les droites MK, MV, SK, SV, ès point O, N, Q, [...] » とあり、円と直線 MK の交点 P が脱落している。*Ibid.*, p.113.

NO, PQ は同一の秩序に属する。これが第 3 補題となるだろう。

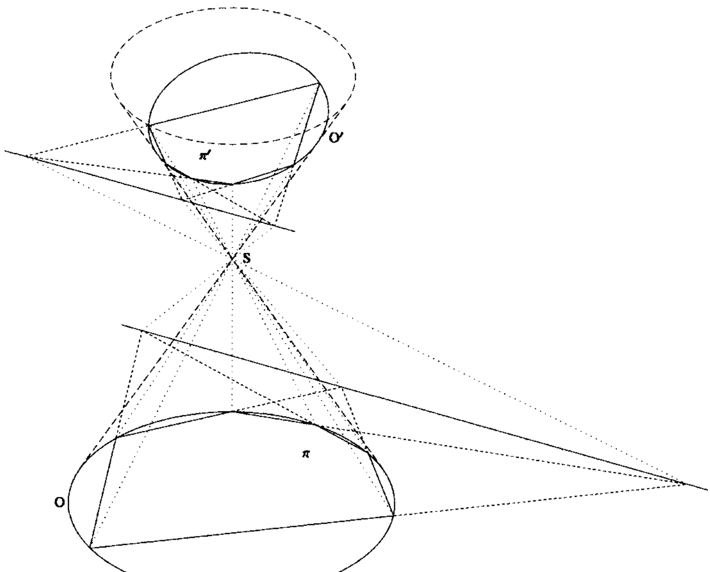
【注解 5】 上と同様、直線 l で交わる 2 平面 π, π' を考える。π 上の $\triangle$ABC について、3 辺 BC, CA, AB がそれぞれ直線 x, y, z 上にあるとすれば、補題 2 によりこれらの 3 直線は全て l と交わる。x, y, z と l との交点をそれぞれ X, Y, Z とする。ここで X, Y, Z を通る π' 上の 3 直線 x', y', z' をとり、y', z' の交点を A′、z', x' の交点を B′、x', y' の交点を C′ とすれば、対応する 3 組の辺（の延長）の交点が同一直線上にある 2 個の三角形 $\triangle$ABC, $\triangle$A′B′C′ を得る。



仮定により 2 直線 BC, B′C′ は点 X で交わるので、4 点 B, C, B′, C′ は同一平面上にある。従って 2 直線 BB′, CC′ は平面 BCB′C′ 上の 1 点で交わる（平行な場合は、無限遠点で交わると考える）。同様に 2 直線 CC′, AA′ は平面 CAC′A′ 上の 1 点で、2 直線 AA′, BB′ は平面 ABA′B′ 上の 1 点で交わる。一般に 3 個の平面はただ 1 個の点を共有するので、この点を S とすれば、3 直線 AA′, BB′, CC′ は 1 点 S で交わることになる [*47]。

*47. 逆に 3 直線 AA′, BB′, CC′ が 1 点 S で交わると仮定する。BB′, CC′ が交わることから、4 点 B, B,

△ABC の外接円を O とする。O の各点と点 S を結んだ直線の線束は、O を底面とする円錐を成す。この円錐の平面 π' による切断面の周 O′ は、2 平面 π, π' の成す角に応じて、円錐曲線として定義 2 で列挙された様々な図形を呈する。他方、π 上の任意の直線 a について、a の各点を点 S と結んだ直線の線束を π' で切断すれば、π' 上では明らかに 1 本の直線を得る。



こうして S からの射影という操作より、円について述べられた補題 1 が、円錐曲線一般に関する補題 3 にまで拡張される。以下パスカルの掲げる諸定理においても、円の場合の証明が与えられれば、同様の理由で命題が一般化されることになる。

C′, C′ は同一平面上にあり、2 直線 BC, B′C′ は 1 点 X で交わる。BC は平面 π 上の直線、B′C′ は平面 π' 上の直線なので、2 直線の交点 X は π, π' の交線 l 上にある。同様に CC′, AA′ の交点 Y、AA′, BB′ の交点 Z も l 上にある。こうしてパスカルの先駆者であるデザルグの名を後世に伝える次の命題を得る。

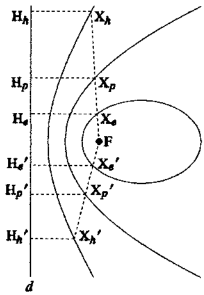
デザルグの定理　2 個の三角形 △ABC, △A′B′C′ について、対応する 3 組の辺（の延長）の交点が同一直線上にあることと、3 直線 AA′, BB′, CC′ が 1 点で交わることとは同等である。

デザルグの定理は同一平面上の 2 個の三角形についても成り立つが、証明には若干の技巧を要し、ここでは紙数の都合上省略する。

* * *

En suite de ces trois lemmes et de quelques conséquences d'iceux, nous donnerons des éléments coniques complets, à savoir toutes les propriétés des diamètres et côtés droits, des tangentes, etc., la restitution du cône presque sur toutes les données, la description des sections de cône par points, etc.

【試訳】 これら 3 個の補題とそこからの若干の帰結に続いて、私たちは円錐曲線について完備された原論、すなわち直径や傍径、接線等の諸性質、ほぼ全ての与件についての円錐の復元、点による円錐曲線の作図を与えるだろう。



【注解 6】 円錐曲線に関する用語を整理しておく。

F を定点、d を定直線とし、F からの距離と d からの距離との比が定数 ε として与えられる点の軌跡を考える。その軌跡が $0 < \varepsilon < 1$ ならば楕円、$\varepsilon = 1$ ならば放物線、$\varepsilon > 1$ ならば双曲線であることは、パッポスによる円錐曲線の定義として知られている[*48]。すなわち左図において、X_e, X_e' を楕円上の任意の 2 点、H_e, H_e' をそれぞれ X_e, X_e' から d に下ろした垂線の足として

$$0 < \frac{FX_e}{X_eH_e} = \frac{FX_e'}{X_e'H_e'} < 1$$

X_p, X_p' を放物線上の任意の 2 点、H_p, H_p' をそれぞれ X_p, X_p' から d に下ろした垂線の足として

$$\frac{FX_p}{X_pH_p} = \frac{FX_p'}{X_p'H_p'} = 1$$

X_h, X_h' を双曲線上の任意の 2 点、H_h, H_h' をそれぞれ X_h, X_h' から d に下ろした垂線の足として

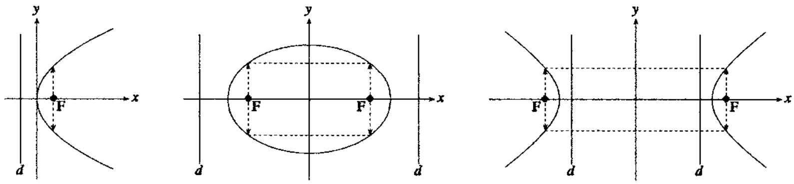
$$\frac{FX_h}{X_hH_h} = \frac{FX_h'}{X_h'H_h'} > 1$$

が成り立つ。こうして定義された円錐曲線について、F を焦点、d を準線、ε を離心率という。今日の私たちに親しいデカルト座標における方程式の標準形を用いれば、$p \neq 0,\ a > b > 0$ を定数として

*48. パッポス『数学集成』第 7 巻命題 238。

	放物線	楕円	双曲線
方程式	$y^2 = 4px$	$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$	$(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$
主軸（焦点軸）直径		2a	2a
副軸（非焦点軸）直径		2b	2b
中心の座標		$(0,0)$	$(0,0)$
頂点の座標	$(0,0)$	$(\pm a,0)$, $(0,\pm b)$	$(\pm a,0)$
焦点 F の座標	$(p,0)$	$\left(\pm\sqrt{a^2-b^2},0\right)$	$\left(\pm\sqrt{a^2+b^2},0\right)$
準線 d の方程式	$x=-p$	$x = \pm a^2/\sqrt{a^2-b^2}$	$x = \pm a^2/\sqrt{a^2+b^2}$
離心率 ε	1	$\sqrt{1-(b/a)^2}$	$\sqrt{1+(b/a)^2}$

となる[*49]。



$y^2=4px$　　$(x/a)^2+(y/b)^2=1$　　$(x/a)^2-(y/b)^2=1$

「傍径」と試訳した côté droit（仏）、rectum latus（羅）は 17 世紀、円錐曲線について焦点を通り準線に平行な弦（上図の両端矢印破線の線分）を指し、直径 diamètre に対して paramètre、あるいは「付加径」coadjuteur 等とも呼ばれた。例えば放物線 $x^2 = 4px$ の傍径の長さは $4p$、楕円または双曲線 $(x^2/a^2) \pm (y^2/b^2) = 1$ の傍径の長さは $2b^2/a$ となる。18 世紀にはこれらの長さの半分（すなわち弦の端点の y 座標の絶対値）が傍径とされるようになった。また楕円・放物線については当初、上に述べた弦を 1 組の対辺とする長方形について、準線に垂直な辺（矢印の無い破線の線分）を傍径とすることもあったが、この広義の用法は後に廃れた[*50]。

「ほぼ全ての与件についての円錐の復元」とは、与えられた条件を満たすような円錐曲線を通る円錐の頂点を求めることを、「点による円錐曲線の作図」とは、与えられた条件を満たすような点を含む円錐曲線を作図することを意味する。

*49. 上に挙げた性質の他、双曲線は座標原点から遠ざかるにつれ、直線 $y = \pm(b/a)x$ に限りなく近づく。この直線を双曲線の漸近線という。

*50. *Desargues*, p.24. *Taton*, p.13. *Pascal*, t.I, p.1032. L'article « paramètre » in Alain Bouvier et al., *Dictionnaire des mathématiques*, 1979, PUF.

* * *

Quoi faisant, nous énonçons les propriétés que nous en touchons d'une manière plus universelle qu'à l'ordinaire. Par exemple, celle-ci : si dans le plan MSQ, dans la section de cône PKV, sont menées les droites AK, AV, atteignant la section aux points P, K, Q, V [*51] ; et que de deux de ces quatre points qui ne sont point en même droite avec le point A, comme par les points K, V, et par deux points N, O, pris dans le bord de la section, sont menées quatre droites KN, KO, VN, VO, coupant les droites AV, AP aux points S, T, L, M[a] : je dis que la raison composée des raisons de la droite PM à la droite MA, et de la droite AS à la droite SQ, est la même que la composée des raisons de la droite PL à la droite LA, et de la droite AT à la droite TQ.

【異同】 *a*. L, M, T, S (1640) より訂正。

【試訳】

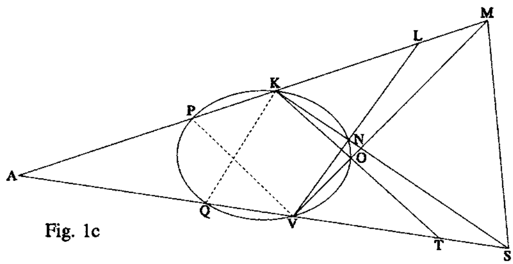


Fig. 1c

こうして私たちは、円錐曲線について通常にまして普遍的に知られる諸性質を述べることになる。例えば次の性質である。すなわち平面 MSQ 上の円錐曲線 PKV において直線 AK, AV が引かれ、円錐曲線と点 P, K, Q, V で交わるとし、これら 4 個の点のうち点 A と同一直線上にない 2 点、例えば点 K, V と、円錐曲線の端にとられた 2 点 N, O を通る 4 直線 KN, KO, VN, VO を引き、これらが直線 AV, AP と点 S, T, L, M で交わるとすれば、直線 PM と直線 MA の比と、直線 AS と直線 SQ の比との複比は、直線 PL と直線 LA の比と、直線 AT と直線 TQ の比との複比と同じである。

*51. タトン版では PK, QV とあり、点ではなく直線の表記になっている。*Taton*, p.13.

【注解 7】 第 1 定理の主張は

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{MA}}\cdot\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SQ}}=\frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{LA}}\cdot\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{TQ}}\quad\text{すなわち}\quad\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AM}}\cdot\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{PL}}=\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{QT}}\cdot\frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{AS}}\tag{3}$$

と表される。点 P, Q, O, N を V と結ぶ直線の線束と、K と結ぶ直線の線束とを考える。円の場合、前者を直線 AM で切断した点列の複比 (PA, ML) と、後者を直線 AS で切断した点列の複比 (AQ, TS) とについて、円の射影的性質（補題 G）により両者は等しく、(3) を得る。この結論は補題と同じく、射影の操作により円錐曲線一般の場合に拡張される。以下の定理についても同様である。

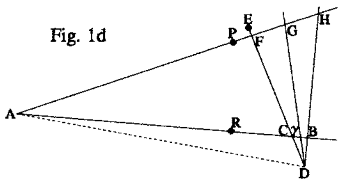
* * *

Nous démontrerons aussi que s'il y a trois droites DE, DG, DH, que les droite AP, AR coupent aux points F, G, H, C, γ, B, et que dans la droite DC soit déterminé le point E, la raison composée des raisons du rectangle EF en FG au rectangle EC en Cγ, et de la droite Aγ à la droite AG, est la même que la composée des raisons du rectangle EF en FH au rectangle EC en CB, et de la droite AB à la droite AH. Et est aussi la même que la raison du rectangle des droites FE, FD au rectangle des droites CE, CD.

【異同】 パスカルによる図（Fig. 1）では R が r と誤記されている。

【試訳】

Fig. 1d



私たちはまた、次のことを証明するだろう。すなわち 3 直線 DE, DG, DH があり、直線 AP, AR と点 F, G, H, C, γ, B で交わり、直線 DC 上に点 E が定められているとすれば、EF が FG と成す長方形と、EC が Cγ と成す長方形の比と、直線 Aγ と直線 AG の比との複比は、EF が FH と成す長方形と、EC が CB と成す長方形の比と、直線 AB と直線 AH の比との複比と同じである。また直線 FE, FD が成す長方形と直線 CE, CD が成す長方形の比とも同じである。

【注解 8】「長方形」とは名指された 2 線分で長方形を作った場合の面積、すなわち 2 線分の長さの積と解する。このとき第 2 命題の前半の主張は

$$\frac{\mathrm{EF}\cdot\mathrm{FG}}{\mathrm{EC}\cdot\mathrm{C}\gamma}\cdot\frac{\mathrm{A}\gamma}{\mathrm{AG}}=\frac{\mathrm{EF}\cdot\mathrm{FH}}{\mathrm{EC}\cdot\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}}=\frac{\mathrm{FE}\cdot\mathrm{FD}}{\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CD}} \tag{4}$$

と表される。$\triangle$ACF と直線 DγG にメラネウスの定理（補題 D）を適用して

$$\frac{\mathrm{A}\gamma}{\gamma\mathrm{C}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DF}}\cdot\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GA}}=-1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{C}\gamma}\cdot\frac{\mathrm{A}\gamma}{\mathrm{AG}}=\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{CD}} \tag{a}$$

同じ三角形と直線 DBH に同じ定理を適用して

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DF}}\cdot\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HA}}=-1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}}=\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{CD}} \tag{b}$$

他方

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EC}}=\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{CE}}$$

は自明なので、(a) からは第 1 辺と第 3 辺について、(b) からは第 2 辺と第 3 辺について等号を得る。このとき第 1 辺と第 2 辺についても等号が成り立ち

$$\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{C}\gamma}\cdot\frac{\mathrm{A}\gamma}{\mathrm{AG}}=\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{\mathrm{A}\gamma}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{C}\gamma}=\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AH}}\cdot\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{FG}} \tag{c}$$

を得るが、これは複比の不変性（補題 E)、すなわち同一の線束 DA, DCF, DγG, DBH について、直線 AB で切断した点列の複比 (AC, γB) と、直線 AH で切断した点列の複比 (AF, GH) とが等しいことを意味する。

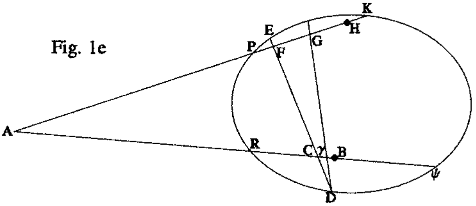
* * *

Partant, si par les points E, D passe une section de cône qui coupe les droites AH, AB ès points P, K, R, ψ, la raison composée des raisons du rectangle des droites EF, FG[a] au rectangle des droites EC, Cγ, et de la droite γA à la droite AG, sera la même que la composée des raisons du rectangle des droites FK, FP au rectangle des droites CR, Cψ, et du rectangle des droites AR, Aψ au rectangle des droites AK, AP.

【異同】 *a*. FC (1640) より訂正。

【試訳】

Fig. 1e



従って、点 E, D をある円錐曲線が通り、直線 AH, AB と点 P, K, R, ψ で交わるとすれば、直線 EF, FG の長方形と直線 EC, Cγ の長方形の比と、直線 γA と直線 AG の比との複比は、直線 FK, FP の長方形と直線 CR, Cψ の長方形の比と、直線 AR, Aψ の長方形と直線 AK, AP の長方形の比との複比と同じであるだろう。

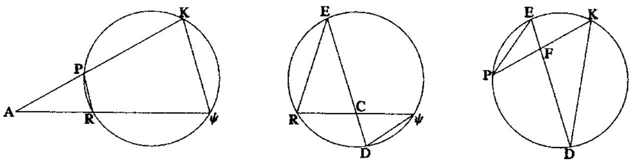
【注解 9】 第 2 定理の後半の主張は

$$\frac{\mathrm{EF}\cdot\mathrm{FG}}{\mathrm{EC}\cdot\mathrm{C}\gamma}\cdot\frac{\gamma\mathrm{A}}{\mathrm{AG}}=\frac{\mathrm{FK}\cdot\mathrm{FP}}{\mathrm{CR}\cdot\mathrm{C}\psi}\cdot\frac{\mathrm{AR}\cdot\mathrm{A}\psi}{\mathrm{AK}\cdot\mathrm{AP}} \tag{5}$$

と表され、これは前半の結論により

$$\frac{\mathrm{FE}\cdot\mathrm{FD}}{\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{FK}\cdot\mathrm{FP}}{\mathrm{CR}\cdot\mathrm{C}\psi}\cdot\frac{\mathrm{AR}\cdot\mathrm{A}\psi}{\mathrm{AK}\cdot\mathrm{AP}} \tag{5$'$}$$

と書き換えられる。円の場合、内接四角形の内角と対外角の関係（補題 A）により $\triangle$APR ~ $\triangle$AψK、同一弧の円周角の関係（補題 B）により $\triangle$CDψ ~ $\triangle$CRE および $\triangle$FDK ~ $\triangle$FPE が成り立つ。



これらの相似関係より

$$\mathrm{AK}\cdot\mathrm{AP}=\mathrm{AR}\cdot\mathrm{A}\psi,\quad \mathrm{CE}\cdot\mathrm{CD}=\mathrm{CR}\cdot\mathrm{C}\psi,\quad \mathrm{FE}\cdot\mathrm{FD}=\mathrm{FK}\cdot\mathrm{FP}$$

が導かれ、ここから (5′)、従って (5) を得る。

この命題は 19 世紀初頭、ラザール・カルノーにより、次の美しい定理に一般化される。すなわち Ω を平面上の任意の曲線、$P_1, P_2, \ldots, P_n$ を同じ平面上の n 個の相異

なる点とし、n 個の頂点から成る多辺形 $P_1P_2\dots P_n$ を考える。多辺形の隣り合う頂点 P_i と P_j について、辺 P_iP_j またはその延長と Ω との交点を $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ として、(P_iP_j) を

$$(P_iP_j) = P_iQ_1 \cdot P_iQ_2 \cdots P_iQ_k$$

(P_jP_i) を

$$(P_jP_i) = P_jQ_1 \cdot P_jQ_2 \cdots P_jQ_k$$

と定義する。こうして多辺形の n 個の辺 P_iP_j のそれぞれに対し (P_iP_j) と (P_jP_i) とを定めれば

$$\begin{aligned}&(P_1P_2)\cdot(P_2P_3)\cdots(P_{n-1}P_n)\cdot(P_nP_1)\\ =\ &(P_2P_1)\cdot(P_3P_2)\cdots(P_nP_{n-1})\cdot(P_1P_n)\end{aligned}$$

が成り立つ（**カルノーの定理**）*52。(5′) の分母を払えば

$$\begin{aligned}&(AR\cdot A\psi)\cdot(CE\cdot CD)\cdot(FK\cdot FP)\\ =\ &(CR\cdot C\psi)\cdot(FE\cdot FD)\cdot(AK\cdot AP)\end{aligned}$$

となるが、これはカルノーの定理を △ACF に適用したものに他ならない *53。

* * *

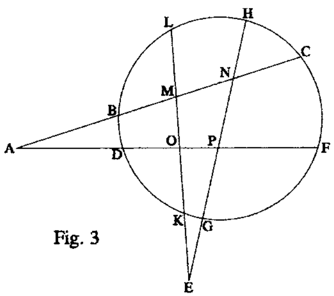


Fig. 3

Nous démontrerons aussi que si quatre droites AC, AF, EH, EL s'entrecoupent ès points N, P, M, O, et qu'une section de cône coupe lesdites droites ès points C, B, F[a],

*52. Lazare Carnot, *Géométrie de position*, 1803, Chapelet. $n = 3$ の場合は段落 378（p.435-437）、一般の場合は段落 379（p.437）に述べられている。

*53. *Taton*, p.15.

D, H, G, L, K, la raison composée des raisons du rectangle de MC en MB au rectangle des droites PF, PD, et du rectangle des droites AD, AF au rectangle des droites AB, AC, est la même que la raison composée des raisons du rectangle des droites ML, MK au rectangle des droites PH, PG, et du rectangle des droites EH, EG au rectangle des droites EK, EL.

【異同】 *a*. E (1640) より訂正。

【試訳】 私たちはまた、次のことを証明するだろう。すなわち 4 本の直線 AC, AF, EH, EL が点 N, P, M, O で交わり、ある円錐曲線がそれらの直線と点 C, B, F, D, H, G, L, K で交わるとすれば、MC が MB と成す長方形と直線 PF, PD の長方形の比と、直線 AD, AF の長方形と直線 AB, AC の長方形の比との複比は、直線 ML, MK の長方形と直線 PH, PG の長方形の比と、直線 EH, EG の長方形と直線 EK, EL の長方形の比との複比と同じである。

【注解 10】 第 3 定理の主張は

$$\frac{\mathrm{MC}\cdot\mathrm{MB}}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{ML}\cdot\mathrm{MK}}{\mathrm{PH}\cdot\mathrm{PG}}\cdot\frac{\mathrm{EH}\cdot\mathrm{EG}}{\mathrm{EK}\cdot\mathrm{EL}} \tag{6}$$

と表される。第 2 定理の後半と同様、円の場合、内接四角形の内角と対外角の関係（補題 A）により

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABD}\sim\triangle\mathrm{AFC} \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} \\ \triangle\mathrm{EGK}\sim\triangle\mathrm{ELH} \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{EH}\cdot\mathrm{EG}=\mathrm{EK}\cdot\mathrm{EL} \end{aligned}$$

同一弧の円周角の関係（補題 B）により

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{MBL}\sim\triangle\mathrm{MKC} \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{MC}\cdot\mathrm{MB}=\mathrm{ML}\cdot\mathrm{MK} \\ \triangle\mathrm{PDH}\sim\triangle\mathrm{PGF} \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{PF}\cdot\mathrm{PD}=\mathrm{PH}\cdot\mathrm{PG} \end{aligned}$$

なので (6) を得る。これは

$$\begin{aligned} &(\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC})\cdot(\mathrm{MK}\cdot\mathrm{ML})\cdot(\mathrm{EG}\cdot\mathrm{EH})\cdot(\mathrm{PD}\cdot\mathrm{PF}) \\ &=(\mathrm{MB}\cdot\mathrm{MC})\cdot(\mathrm{EK}\cdot\mathrm{EL})\cdot(\mathrm{PG}\cdot\mathrm{PH})\cdot(\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF}) \end{aligned}$$

すなわちカルノーの定理を四辺形 AMEP に適用したものに他ならない。

* * *

Nous démontrerons aussi cette propriété, dont le premier inventeur est M. Desargues Lyonnais, un des grands esprits de ce temps et des plus versés aux mathématiques, et entre autres aux coniques, dont les écrits sur cette matière, quoiqu'en petit nombre, en ont donné un ample témoignage à ceux qui en auront voulu recevoir l'intelligence ; et je[a] veux bien avouer que je dois le peu que j'ai trouvé sur cette matière à ses écrits, et que j'ai tâché d'imiter autant qu'il m'a été possible sa méthode sur ce sujet, qu'il a traité sans se servir du triangle par l'axe.

【異同】 *a.* (1640) では脱落。

【試訳】 私たちはリヨン人デザルグ氏を最初の発見者とする次の性質も証明するだろう。氏は数学、特に円錐曲線に今日最も通暁した俊英の一人で、この分野における氏の著作は少数とはいえ、その理解に浴することを仮初にも望んだ者にとって、氏の卓越を具に証拠立ててきた。率直に申して、この分野で私が僅かなりとも何かを見出したとすれば、それは氏の著作のお蔭であり、氏が軸三角形を用いずに扱ったこの主題についての氏の方法を、私は可能な限り真似ようと努めたのである。

【注解 11】 デザルグの『計画草稿』は 1639 年、すなわち『円錐曲線試論』発表の前年、50 部印刷され、メルセンヌのアカデミーで配布されたが、その発想や用語の独自性もあり、同時代には大きな反響を見出さなかった。パスカルはその理由を、『計画草稿』の「理解に浴することを仮初にも望んだ者」がほとんど無かったことに帰しているように思われる。

「軸三角形」は円錐の頂点と軸、底面の直径を通る三角形を意味し、アポロニオス以来の伝統的な円錐曲線論において中心的な役割を果たした。これに対しデザルグは軸三角形を考慮することなく、円錐の切断面と底面の成す角によって様々な円錐曲線を考え（【注解 2】）、底面の円周の性質から円錐曲線の性質を捉えることを構想したのだった[*54]。

* * *

Et, traîtant généralement de toutes les sections de cône, la propriété merveilleuse dont il[a] est question est telle : si dans le plan MSQ il[a] y a une section de cône PQV, dans le bord de laquelle ayant pris quatre points K, N, O, V, sont menées les droites KN, KO, VN, VO, de sorte que par un même des quatre points ne passent que deux droites, et qu'une autre droite coupe tant le bord[b] de la section aux points R[c], ψ, que les droites KN, KO,

---

*54. *Chasles*, p.75.

VN, VO ès points x, y, z, δ : je dis que comme le rectangle des droites zR[d], zψ est au rectangle des droites xR, xψ[e], ainsi le rectangle des droites δR[f], $\delta\psi$ est au rectangle des[a] droites yR, yψ[g].

【異同】 *a*. (1640) では脱落。*b*. abord (1640) より訂正。*c*. r (1640) より訂正。*d*. zr (1640) より訂正。*e*. yr, $\gamma\psi$ (1640) より訂正。*f*. δr (1640) より訂正。*g*. xr, xψ (1640) より訂正。

【試訳】

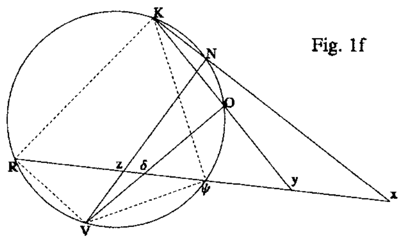


Fig. 1f

さて、一般に全ての円錐曲線を扱う上で、問題となる驚異的な性質とは以下の通りである。すなわち平面 MSQ 上に円錐曲線 PQV があり、その縁に 4 点 K, N, O, V をとって直線 KN, KO, VN, VO を引き、これら 4 点をそれぞれ 2 直線ずつしか通らないとし、また別の直線が円錐曲線の縁とは点 R, ψ で交わり、直線 KN, KO, VN, VO とは点 x, y, z, δ で交わるとする。このとき直線 zR, zψ の長方形と直線 xR, xψ の長方形との関係は、直線 δR, $\delta\psi$ の長方形と直線 yR, yψ の長方形との関係と同じである。

【注解 12】 1640 年の原文では第 4 定理は印刷上の瑕疵が重なるだけでなく、命題の陳述自体も不正確で *55、これを予備知識なしに解読するのは極めて困難と思われる。

『計画草稿』の冒頭、デザルグは植物との連想に基づき、独特な用語の定義を次のように重ねていく。

> 直線 AH 上の点 A が、2 本の線分から成る 3 組 AB と AH、AC と AG、AD と AF に共通で、それらの組において同様に挟まれるか（engagé）はみ出すか（dégagé）のいずれかであり、3 個の長方形が互いに等しいとき、直線におけるこのような条件をここでは「木」arbre、また直線自体を「幹」tronc という。

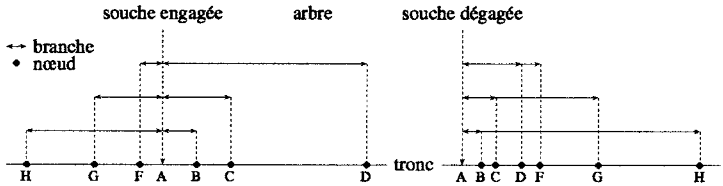
*55. タトンにより初めて指摘された。*Taton*, p.17-18.

6 本の線分 AB, AH, AC, AG, AD, AF それぞれに共通な A のような点を「株」souche という。同じ 6 本の線分 AB, AH, AC, AG, AD, AF のそれぞれを「分枝」branche という。[...] AB と AH、AC と AG、AD と AF という 3 組のそれぞれの分枝の両端 B, C, D, F, G, H を「節」nœud という。[...] 同じ木で、任意の組 GC の任意の端 G、また他の任意の組 DF の他の任意の端 F の間の線分 GF のような、それぞれの線分を、「幹に畳まれた枝の芽」brin de rameau plié au tronc という。[...] GD と GF、GB と GH のように、どれも一方が同一の分枝 AG の節 G に結ばれ、他方が 2 個の異なる節の組 D と F、B と H に達するような 2 個の芽の異なる 2 組を、「双子の芽の組」couples de brins gemelles entre elles という [*56]。

すなわちデザルグの「木」とは

$$AB \cdot AH = AC \cdot AG = AD \cdot AF$$

を満たす同一直線上の点 A, B, C, D, F, G, H の位置関係である。



このとき、2 個の点の 3 組 (B, H), (C, G), (D, F) から生成される 2 個の「双子の芽の組」について

$$\frac{BC \cdot BG}{HC \cdot HG} = \frac{BD \cdot BF}{HD \cdot HF} \tag{7}$$

*56. « Quand en une droite AH, il y a un point A commun et semblablement engagé ou dégagé aux deux pièces de chacune de trois couples AB, AH, AC, AG, AD, AF, dont les trois rectangles sont égaux entre eux, une telle condition en une droite est ici nommé *arbre*, dont la droite même est *tronc*. Le point comme A, ainsi commun à chacune de ces six pièces AB, AH, AC, AG, AD, AF, y est nommé *souche*. Chacune des mêmes six pièces AB, AH, AC, AG, AD, AF, y est nommée *branche*. [...] Chacun des bouts séparés B, C, D, F, G, H, des branches de chacune des trois couples AB, AH, AC, AG, AD, AF, y est nommé *nœud*. [...] Chaque pièce du même arbre, comme la pièce GF contenue entre un quelconque des nœds G d'une quelconque couple GC, et un autre quelconque nœud F d'une autre quelconques des couples DF, y est nommée *brin de rameau plié au tronc*. [...] Deux couples diverses de brins comme GD, GF, GB, GH, qu'une même brance AG porte, nouées ensemble à son nœud G, et qui d'ailleurs aboutissent à deux couples diverses d'autres nœuds D, F, B, H, y sont nommées *couples de brins gemelles entre elles*. » *Desargues*, p.2. 強調は 1639 年版の文面による。

という関係が成り立つ。実際、β, γ, δ を 0 でない定数として

$$AB = \beta, \quad AH = \pm\frac{1}{\beta}$$
$$AC = \gamma, \quad AG = \pm\frac{1}{\gamma}$$
$$AD = \delta, \quad AF = \pm\frac{1}{\delta}$$

とすれば [*57]

$$\frac{BC \cdot BG}{BD \cdot BF} = \frac{HC \cdot HG}{HD \cdot HF} = \frac{\delta(\beta-\gamma)(\beta\gamma \mp 1)}{\gamma(\beta-\delta)(\beta\delta \mp 1)}$$

（複号同順）である。デザルグは (7) の関係を「対合」involution と名付け [*58]、この関係を基礎に円錐曲線の諸性質を体系的に導いていく。

第 4 定理は円錐曲線に内接する四辺形 KNVO の 2 組の対辺 KN と VO、KO と NV、および円錐曲線の割線 Rψ により定められる点の組 (R, ψ), (x, δ), (y, z) が対合関係

$$\frac{Rx \cdot R\delta}{\psi x \cdot \psi\delta} = \frac{Ry \cdot Rz}{\psi y \cdot \psi z} \tag{7'}$$

にあることを主張する。円の場合で考えれば、円の射影的性質（補題 G）により、4 点 R, ψ, N,O を点 K と結ぶ直線の線束と、点 V と結ぶ直線の線束とについて、直線 Rψ でそれぞれの線束を切断した点列の複比 (Rψ, xy) と (Rψ, zδ) とは等しい。すなわち

$$\frac{Rx}{\psi x} \cdot \frac{\psi y}{Ry} = \frac{Rz}{\psi z} \cdot \frac{\psi\delta}{R\delta}$$

で、これは (7′) に他ならない。1640 年版での定理の主張

$$\frac{zR \cdot z\psi}{yR \cdot \gamma\psi} = \frac{\delta R \cdot \delta\psi}{xR \cdot x\psi}$$

は、左辺分母の γ を y の誤記としても、デザルグの対合定理との整合性を欠く。

＊＊＊

*57. B と H が A に関して同じ側にあれば（すなわち A が「はみ出した株」souche dégagée ならば）AB と AH を同符号、異なる側にあれば（すなわち A が「挟まれた株」souche engagée ならば）異符号とする。C と G、D と F についても同様である。

*58. *Ibid.*, p.3. デザルグの新語法のうち数学の術語として今日まで残った唯一の例であるが、パスカルはこの語を用いていない。

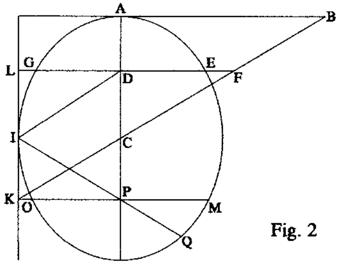


Fig. 2

Nous démontrerons aussi que si dans le plan de l'hyperbole ou de l'ellipse ou du cercle AGE, dont le centre est C, on mène la droite AB, touchant au point A la section, et qu'ayant mené le diamètre CA, on prenne la droite AB dont le carré soit égal au quart du rectangle de la figure, et qu'on mène CB, alors quelque droite qu'on mène, comme DE, parallèle à la droite AB, coupant la section en E, et les droites AC, CB ès points D, F, si la section AGE est une ellipse ou un cercle, la somme des carrés des droites DE, DF sera égale au carré de la droite AB, et dans l'hyperbole, la différence des mêmes carrés des droites DE, DF sera égale au carré de la droite AB.

【試訳】 私たちはまた次のことを証明するだろう。すなわち C を中心とする双曲線または楕円または円 AGE の平面において、点 A で円錐曲線に接する直線 AB を引き、直径 CA を引いて、直線 AB を、その正方形が図形の長方形の四分の一に等しくなるようにとり、CB を引き、例えば DE のような直線 AB と平行な、円錐曲線とは E で、直線 AC, CB とは点 D, F で交わる、任意の直線を引くとする。このとき円錐曲線 AGE が楕円または円ならば、直線 DE, DF のそれぞれの正方形の和は直線 AB の正方形に等しく、双曲線においては、直線 DE, DF の同じ正方形の差は直線 AB の正方形に等しいだろう。

【注解 13】「図形の長方形」rectangle de la figure は 17 世紀の用法では、主軸直径と傍径（【注解 6】）の成す長方形を指す。18 世紀には既に用いられなくなっていたこの表現を、注釈者の多くは主軸直径と副軸直径の成す長方形（楕円の場合、これは外接四角形に相当する）ととり、解釈上の隘路に陥った*[59]。

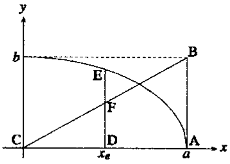
解析幾何学の手法を用いれば、第 5 定理の主張は一目瞭然である。主軸・副軸の直

*59. *Taton*, p.17.

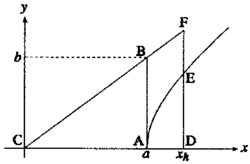
径がそれぞれ $2a, 2b$ の楕円または双曲線

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

の傍径は $2b^2/a$ なので、「図形の長方形」は $(2a)\cdot(2b^2/a) = 4b^2$ となる。このとき $AB^2 = b^2$、すなわち $AB = b$ なので、点 A, B, C の座標は $A(a,0)$, $B(a,b)$, $C(0,0)$ ととれる。



$(a/x)^2+(b/y)^2=1$



$(a/x)^2-(b/y)^2=1$

楕円の場合、$D(x_e, 0)$ とすれば

$$DE^2 = b^2 - \left(\frac{bx_e}{a}\right)^2, \quad DF^2 = \left(\frac{bx_e}{a}\right)^2$$

なので

$$DE^2 + DF^2 = b^2 = AB^2 \tag{8}$$

双曲線の場合、$D(x_h, 0)$ とすれば

$$DE^2 = \left(\frac{bx_h}{a}\right)^2 - b^2, \quad DF^2 = \left(\frac{bx_h}{a}\right)^2$$

なので

$$DF^2 - DE^2 = b^2 = AB^2 \tag{9}$$

となる。

* * *

Nous déduirons aussi quelques autres problèmes, par exemple :

D'un point donné mener une droite touchant une section de cône donnée.

Trouver deux diamètres conjugués en angle donné.

Trouver deux diamètres en angle donné et en raison donnée.

Nous avons plusieurs autres problèmes et théorèmes et plusieurs conséquences des précédents ; mais la défiance que j'ai de mon peu d'expérience et de capacité ne me permet pas d'en avancer davantage avant qu'il ait passé à l'examen des habiles gens, qui voudront bien nous obliger d'en prendre la peine ; après quoi, si l'on juge que la chose mérite d'être continuée, nous essaierons de la pousser jusqu'où Dieu nous donnera la force de la conduire.

A Paris, M. DC. XL.

【試訳】 私たちは例えば次のような、別の問題も導くだろう。すなわち

与えられた点から、与えられた円錐曲線に接する直線を引くこと。

与えられた角を成す 2 個の共役直径を求めること。

与えられた角、与えられた比を成す 2 個の直径を求めること。

他にも多くの問題や定理、そこからの帰結があるとはいえ、自らの経験と能力の不足を顧みて、識者にご検討頂く前にこれ以上を述べるのは控え、然る後、継続の価値ありと判断されれば、神が力を与え給うところまで推し進めるよう努めることとしよう。

パリ、1640 年

【注解 14】 上の諸命題の証明についてと同様、これらの問題にパスカルが如何なる解を与えたか、推察を許す資料は知られていない。

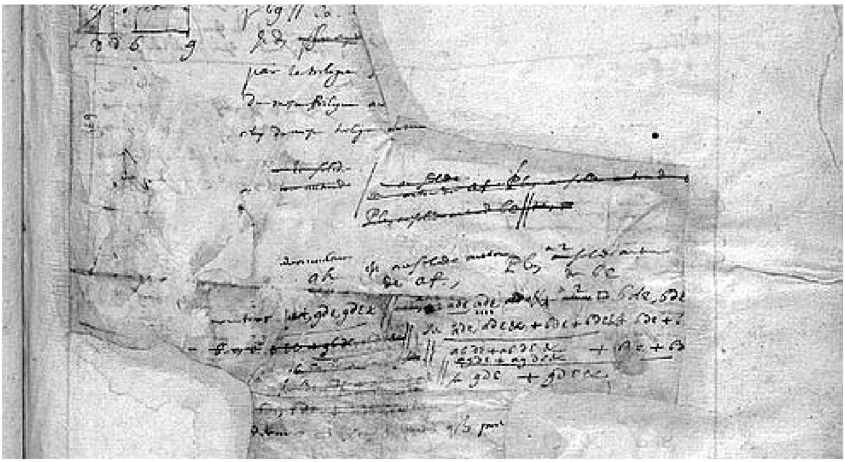
参考文献

- Bouvier, Alain et al., *Dictionnaire des mathématiques*, 1979, PUF.
- Carnot, Lazare, *Géométrie de position*, 1803, Chapelet.
- Chasles, Michel, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 1837, Hayez, Bruxelles.
- Desargues, Girard, *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, 1639, http ://gallica.bnf.fr/ark :/12148/bpt6k105071b.
- Descartes, René, *Œuvres complètes*, 11 vol., éd. par Adam et Tannery, 1996, Vrin.
- Euclide, *Œuvres*, éd. par Peyrard, 1814, Patris.

– Pascal, Blaise, *Œuvres complètes*, 2 vol., éd. par Le Guern, 1998-2000, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard.
– Taton, René, « L'*Essay pour les Coniques* de Pascal » in *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 8-1, 1955.
– 寺阪英孝『初等幾何学 第 2 版』1973、岩波書店。
– 矢野健太郎『エレガントな解答』1958、法政大学出版局。2007、筑摩書店。

付記

2010 年 8 月 30 日付フィガロ紙によれば、幾何学に関するパスカルの覚書がフランス国立図書館で新たに発見された。紙片の裏は後に『田舎の友への手紙』の下書きに用いられ、表の記載はこれまで研究者に気付かれることがなかったという。数学関係でパスカル直筆の資料はこれまで全く見出されていなかった。クレルモン・フェラン大学ドミニク・デコート教授によれば、パスカルの研究方法を窺わせる貴重な資料ではあるが、内容としては円錐曲線の軸を中心とする回転で生じる立体図形の体積に関するもので、数学史的な新発見といえるものではないという [60]。



*60. http ://www.lefigaro.fr/sciences-technologies/2010/08/26/01030-20100826ARTFIG00638-decouverte-d-un-manuscrit-de-blaise-pascal-inconnu.php.